# Variace na invarianci

Úlohy na téma Limitní množiny Kleinových grup

1. (1b) Ukažte, že mœbiovské transformace zachovávají množinu všech kružnic a přímek v $\mathbb{C}$.
2. (1b) Ukažte, že pro mœbiovskou transformaci
$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
platí
$$|T(z) - T(w)| = \frac{|z-w|}{|cz+d||cw+d|}$$
3. (1b) Nechť $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ jsou tři různé body a $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ jsou tři různé body. Dokažte, že existuje právě jedna mœbiovská transformace, pro kterou $f(z_i) = w_i$ pro $i = 1, 2, 3$.
4. (2b) Dokažte, že volná grupa generovaná maticemi
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
je rovna grupě
$$\left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} | p, s \in 2\mathbb{Z}+1, q, r \in 2\mathbb{Z}, ps - qr = 1 \right\}$$
5. (1b) Ukažte, že trajektorie bodu vzhledem k loxodromickému zobrazení $T(z) = kz$ je spirála, jejíž úhel vůči kružnicím se středem v nule je konstantní.
6. (1b) Ukažte, že pro libovolné dva kruhy v rovině existuje mœbiovská transformace, která zobrazuje vnitřek jednoho na vnějšek druhého.
7. (1b) Najděte mœbiovské zobrazení $K$, které zobrazuje bod 0 na bod $-1$, bod $\infty$ na bod 1 a bod 1 na bod $-i$, tzv. Cayleyho zobrazení. Dokažte, že $K^3 = Id$. Dokažte, že
$$K\ SL(2, \mathbb{R})\ K^{-1} = SU(1, 1),$$
kde
$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ \overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} | |u|^2 - |v|^2 = 1 \right\}$$
8. (2b) Odvoďte Markovovu identitu, tj. že pro $a, b \in SL(2, \mathbb{C})$ platí
$$\operatorname{Tr} aba^{-1}b^{-1} = (\operatorname{Tr} a)^2 + (\operatorname{Tr} b)^2 + (\operatorname{Tr} ab)^2 - \operatorname{Tr} a \operatorname{Tr} b \operatorname{Tr} ab - 2$$
9. (2b) Odvoďte vzorce pro hyperbolickou stereografickou projekci mezi jednotkovým diskem a polovinou dvojdílného hyperboloidu. Ukažte, že stereografická projekce zobrazuje řezy hyperboloidu rovinami jdoucími počátkem na hyperbolické přímky a naopak.