Variace na invarianci (2012/13)
Zápočtové úlohy k sérii
Vektorová pole na sférách

0.1 Příklad (1 bod, pro prváky)**.** Dokažte podrobně, že zobrazení $v : S^1 \to \mathbb{R}^2,\ v(x, y) = (y, -x)$ pro $x^2 + y^2 = 1$, je spojité.

0.2 Příklad (1 bod)**.** Napište explicitní formulku pro dvojici v každém bodě lineárně nezávislých tečných spojitých vektorových polí $v_1, v_2 : T^2 \to \mathbb{R}^3$ na toru T^2, který je parametrizován funkcí $F : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$:

$$F\begin{pmatrix}\varphi\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\\ R\sin\varphi + r\cos\theta\sin\varphi\\ r\sin\theta\end{pmatrix},$$

kde $R > r > 0$ jsou dané parametry.

0.3 Příklad (3 body)**.** Pro oktoniony $x, y, z \in \mathbb{O}$ dokažte vztah $\mathrm{Re}((xy)z - x(yz)) = 0$.

0.4 Příklad (2 body)**.** Ztotožněme $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$ tak, že 7 imaginárních jednotek je ztotožněno s kanonickými bázovými vektory $e_1, \dots, e_7$ a multiplikativní jednotka je ztotožněna s e_8. Připomeňme, že standardní skalární součin v $\mathbb{R}^8$ můžeme spočítat také jako $\langle x|y\rangle = \mathrm{Re}(\overline{x}\cdot y)$. Ověřte (např. pomocí předchozího příkladu), že zobrazení $v_k : S^7 \to \mathbb{R}^8,\ k = 1, \dots, 7$, dané předpisem

$$v_k(x) := e_k \cdot x$$

je tečné pole na S^7 a že pro každé $x \in S^7$ a $i \neq j$ je $v_i(x) \perp v_j(x)$.

0.5 Příklad (2 body)**.** Dokažte, že pokud na S^n existuje k spojitých tečných polí $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, pak pro každé $l \in \mathbb{N}$ existuje na $S^{l(n+1)-1}$ také k spojitých tečných polí. Tedy v notaci z přednášky: $P(n) \geq k \Rightarrow P(l(n+1) - 1) \geq k$.

V dalším cvičení předpokládejme, že pro každé spojité $f : S^n \to S^n$ existuje číslo $\deg f \in \mathbb{Z}$ tak, že platí:

1. Pro $i = 1, \dots, n+1$ a $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$ je $\deg f = -1$.
2. Pro spojitá $f, g : S^n \to S^n$ je $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.
3. Jsou-li spojitá zobrazení $f, g : S^n \to S^n$ homotopická, pak $\deg f = \deg g$. Řekneme, že zobrazení f, g jsou homotopická, právě když existuje spojité zobrazení $H : S^n \times [0, 1] \to S^n$ takové, že

   $$H(x, 0) = f(x),\ H(x, 1) = g(x), \quad \text{pro každé } x \in S^n.$$

   Intuitivně: H popisuje spojitou deformaci zobrazení f na zobrazení g.

Konstrukce deg s těmito vlastnostmi je netriviální!

0.6 Příklad (2 body)**.** Dokažte pomocí deg větu o česání ježka.

Návod: Postupujte sporem a dokažte, že identita na S^n a zobrazení $x \mapsto -x$ jsou homotopická.