

Variace na invarianci
1. série – Neeuklidovská geometrie (L. Krump)

Domácí úkol č. 3 (1 bod)

Nechť čtyři vektory a, b, c, d v rovině jsou po dvou lineárně nezávislé a splňují

$$\begin{aligned}c &= \alpha_1 a + \beta_1 b \\ d &= \alpha_2 a + \beta_2 b,\end{aligned}$$

jejich dvojpoměr je pak definován jako

$$(abcd) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2}.$$

Při označení souřadnic $a = (a_0, a_1), \dots$ dokažte, že

$$(abcd) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}.$$

Domácí úkol č. 4 (3 body)

Najděte pohybovou grupu

$$G = \{A \in GL_2\mathbb{R}; A^T F A = F\},$$

je-li kvadrika určující geometrii zadána maticí

$$\begin{aligned}1) F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 2) F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Označení:

$M_{2 \times 2} = M_{2 \times 2}\mathbb{R}$ je prostor všech čtvercových (reálných) matic 2×2

$GL_2\mathbb{R}$ je tzv. obecná lineární grupa v dimenzi 2, tj. grupa všech regulárních (reálných) matic z $M_{2 \times 2}$, operací je samozřejmě násobení matic.

Vysvětlení, které se nevešlo do semináře (výňatek z připravovaného textu o neeuklidovské geometrii):

V této sekci ukážeme jednak způsob, jak explicitně spočítat eliptickou a hyperbolickou pohybovou grupu a dále alternativní způsob výpočtu invariantů pohybových grup pro případ eliptické a hyperbolické pohybové grupy, a sice pomocí společných vlastních vektorů těchto grup. Vše uvažujeme v dimenzi 1.

Nejprve si uvědomme vztah mezi zadanou kvadrikou a příslušnou pohybovou grupou. Původní definice říká, že pohybová grupa G určující geometrii je definována jako grupa zachovávající zadanou kvadriku $Q = \{x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{R}P^2; f(x, x) = 0\}$, kde f je kvadratická forma. Ekvivalentní způsob je vyjádřit tento vztah přímo pomocí formy f : grupa G je grupa právě těch zobrazení (kolineací), vyjádřených maticí A , které zachovávají tuto formu. To znamená, že pro každé dva vektory x, y je

$$f(x, y) = f(Ax, Ay),$$

neboli v maticovém zápisu (s označením F pro matici formy f)

$$x^T F y = (Ax)^T F (Ay) = x^T A^T F A y.$$

Jelikož toto požadujeme pro všechny dvojice vektorů, lze tuto podmínku zapsat i bez nich, tedy

$$G = \{A \in M_{2 \times 2}; F = A^T F A\}.$$

Tato podmínka vlastně říká více než naše původní definice se zachováváním kvadriky, tj. je zdánlivě silnější (když grupa zachovává formu, zachovává i její nulové body), lze však dokázat, že obě podmínky jsou ekvivalentní.

Nyní můžeme snadno vypočítat pohybové grupy v konkrétních případech – a to je právě váš úkol.