Variace na invarianci 2015
Kleinův Erlangenský program (Lukáš Krump)

Uvažujeme různé geometrie v rovině. Z obvyklé euklidovské geometrie je dostaneme tak, že odebíráme některé pojmy a axiomy. Odebráním skalárního součinu (a tedy i měření délek a úhlů) získáme z euklidovské roviny afinní rovinu, v níž jsou body a směry (tj. nenulové vektory brané až na nenulový násobek), umíme mezi nimi rozlišit a umíme určit střed úsečky. Také tu je definován dělící poměr tří bodů, z něhož lze rozpoznat jak „body v nekonečnu“ (tzv. nevlastní body čili vlastně směry), tak i středy úseček. Projektivní rovinu získáme v principu tak, že odebereme dělící poměr a tedy i schopnost rozlišovat body vlastní od nevlastních, a rovněž středy úseček. Ve skutečnosti se projektivní přímka $\mathbb{R}P^1$ a projektivní rovina $\mathbb{R}P^2$ zkonstruují jako množina všech vektorových přímek ve vektorovém prostoru dimenze o 1 větší, a příslušná afinní přímka resp. rovina se do té projektivní vnoří. K popisu bodů v proj. přímce/rovině nám dobře slouží homogenní souřadnice. V projektivní přímce/rovině nerozlišujeme mezi vlastními a nevlastními body, to je jen vlastností zvoleného vnoření afinní přímky/roviny. Nicméně projektivní rovina splňuje velmi elegantní a jednoduché axiomy, a sice že každé dva body určují právě jednu přímku a každé dvě přímky se protínají právě v jednom bodě; a platí zde princip duality.

Ke každé takové geometrii přísluší pohybová grupa čili grupa jejích symetrií. Pro euklidovskou rovinu máme grupu všech shodností označenou E_2, která je generována všemi rotacemi (o úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$), translacemi (o vektor $v_0 = (x_0, y_0)$) a reflexí třeba podle osy x.

Domácí úkol 1 (1 bod): Dokažte přímým výpočtem, že každá shodnost zachovává skalární součin.

Navíc platí, že E_2 je právě ta největší grupa, která zachovává skalární součin, čili tento výsledek se „nedá vylepšit“. Grupa E_2 má dimenzi 3 (dvě dimenze přidává vektor, o nějž posouváme, jednu úhel, o nějž otáčíme, reflexe nepřidávají žádnou dimenzi).

U afinní geometrie máme grupu všech afinit Af_2, kde jsou translace stejně jako v euklidovské grupě, a místo rotací a reflexí může být jakékoli regulární zobrazení. Grupa Af_2 má dimenzi 6. Na afinní přímce je definován dělící poměr tří bodů takto: $(ABC) = \lambda$, jestliže $C - A = \lambda(C - B)$.

Domácí úkol 2 (2 body): Je-li $(ABC) = \lambda$, určete hodnotu dělícího poměru pro všech šest možných permutací tří bodů. Určete všechny hodnoty čísla $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, pro něž se některé z těchto šesti hodnot rovnají.

Domácí úkol 3 (1 bod): Dokažte přímým výpočtem, že každá afinita zachovává dělící poměr.

Jaká grupa přísluší projektivní rovině a co zachovává? Zavedeme nejprve pojem dvojpoměr čtyř vektorů v rovině takto: Nechť čtyři vektory a, b, c, d v rovině jsou po dvou lineárně nezávislé a splňují

$$\begin{aligned} c &= \alpha_1 a + \beta_1 b \\ d &= \alpha_2 a + \beta_2 b. \end{aligned}$$

Jejich dvojpoměr je pak definován jako

$$(abcd) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2}.$$

Domácí úkol 4 (1 bod): Při označení souřadnic $a = (a_0, a_1), \dots$ dokažte, že

$$(abcd) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}.$$

Je snadno vidět, že hodnota dvojpoměru nezávisí na nenulovém násobku žádného z vektorů a proto lze zavést dvojpoměr čtyř bodů na projektivní přímce: je-li $A = \langle a \rangle = [a_0 : a_1], \dots$, pak $(ABCD) = (abcd)$.

Domácí úkol 5 (1 bod): Je-li $(ABCD) = \lambda$, určete hodnotu dvojpoměru pro všech 24 možných permutací čtyř bodů.

Domácí úkol 6 (1 bod): Dokažte, že jsou-li body A, B, C, D vlastní, pak $(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$; a dále, jsou-li A, B, C vlastní a D nevlastní, pak $(ABCD) = (ABC)$.

Nyní zavedeme grupu projektivit na $\mathbb{R}P^n$ jako

$$PGL_{n+1}\mathbb{R} = \{A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}; |A| \neq 0\}/\{\alpha \neq 0\},$$

čili se jedná o grupu všech regulárních matic (rozměru o jedna většího, než je dimenze našeho projektivního prostoru) braných až na násobek nenulovým číslem. Pro projektivní přímku tedy máme matice 2×2, což jsou čtyři dimenze, minus jedna dimenze kvůli zanedbání násobku, čili dimenze $PGL_2\mathbb{R}$ je 3. Pro rovinu jsou to matice 3×3 a dimenze $PGL_3\mathbb{R}$ je $3^2 - 1 = 8$.

Jsou-li geometrie uspořádané od nejvíce speciální (euklidovské) k nejobecnější (projektivní), jejich pohybové grupy se v tomto směru zvětšují – $E_2 \leq Af_2 \leq PGL_3$. Vztah mezi prvními dvěma je zřejmý (euklidovská rotace a reflexe jsou speciálními případy regulárních zobrazení), zatímco vztah mezi Af a PGL už je méně zřejmý. Na přednášce jsme ale ukázali, že afinní transformace se dají realizovat jako matice tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

které v sobě obsahují posunutí o vektor $\begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix}$ a regulární zobrazení $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

V následující tabulce shrneme dosavadní znalosti:

Geometrie	**Grupa**	**Číselný invariant**	**Množinový invariant**
Projektivní	PGL_3	dvojpoměr	„nic“
Afinní	Af_2	dělící poměr	nevl. přímka
Euklidovská	E_2	skal. součin	nevl. přímka + ?

Číselný invariant je „funkce“, jejíž hodnota se nemění při pohybech z příslušné grupy, množinový invariant je množina bodů, která se při nich nemění. Vidíme, že čím je geometrie speciálnější, tím menší má pohybovou grupu, tím více se zachovává číselně (dvojpoměr lze vypočítat z dělícího poměru, dělící poměr ze skal. součinu, ale bez doplnění dodatečných informací to opačně nejde) a dokonce tím větší je množina objektů, která se zachovává (nikoli ovšem bodově). V projektivní geometrii se nezachovává „nic“, tj. zachovává se pouze celá projektivní rovina jako taková, ale jinak se může jakýkoli bod zobrazit na jakýkoli jiný. V afinní geometrii se už zachovává aspoň něco – konkrétně nevlastní přímka, tj. při každém afinním zobrazení se nevlastní body obrazují na nevlastní a vlastní na vlastní. Čekáme tedy, že i v euklidovské geometrii se zachovává (oproti afinní) cosi navíc, zatím je to označeno otazníkem.

Po několika dalších úvahách na přednášce nám jako vhodní kandidáti přijde tzv. dvojice izotropických bodů $[0 : 1 : i], [0 : 1 : -i]$. Jsou to tedy nevlastní body, které jsou navíc imaginární.

Domácí úkol 7 (2 body): Dokažte, že dvojice izotropických bodů se zachovává při všech euklidovských transformacích, přičemž posunutí a otočení zachovávají každý bod zvlášť, a zrcadlení je prohazuje.

Na přednášce už nezaznělo, že úvaha, dokazující, že izotropické body se nemění při rotacích, souvisí s vlastními vektory rotační matice – rozmyslete si!

Zbytek přednášky jsme se věnovali stručnému představení hyperbolické (Lobačevského) přímky a roviny, které zde nebudeme rozebírat. Alespoň však uvedeme Kleinovu ideu, že z projektivní geometrie je možné získat nové geometrie (v nichž jsme schopni měřit vzdálenosti a úhly) tím, že zvolníme jako množinový invariant nějakou kvadriku (v rovině tento pojem splývá s pojmem kuželosečka). A odsud plyne také klasifikace geometrií:

Kuželosečka	**Geometrie**
Reálná regulární	Hyperbolická
Reálná singulární	Parabolická
Imaginární	Eliptická

Dvojice izotropických bodů je příkladem imaginární kuželosečky v dimenzi 1, což souvisí s tím, že měření úhlů v euklidovské geometrii je eliptické (měření vzdáleností je ovšem parabolické, ale to se sem už nevejde).

Na způsob měření délek resp. úhlů (obecně říkejme míry) při zadané volbě kvadriky nás navádí tzv. Laguerrův vzorec. Uvažujme (euklidovský) svazek přímek v rovině. Naším cílem je vyjádřit obvyklý (euklidovský) úhel dvou přímek ve svazku pomocí dvojpoměru. Zavedeme nejprve souřadnice tak, že jedna libovolně zvolená přímka p_0 bude sloužit jako počátek souřadnic, a pro libovolnou přímku p ve svazku označíme $\varphi = \varphi(p)$ orientovaný úhel mezi p_0 a p, přičemž $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$. Pak je přímka p určena homogenními souřadnicemi $[\cos\varphi : \sin\varphi]$.

Euklidovský pohyb ve svazku, tedy otáčení okolo středu, má invarianty – jak již víme – izotropické přímky, které lze v homogenních souřadnicích zapsat jako $z = [1 : i], t = [1 : -i]$. Uvažujme nyní libovolné dvě reálné přímky svazku $x = [x_0 : x_1], y = [y_0 : y_1]$ a počítejme dvojpoměr s izotropními přímkami:

$$(xyzt) = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & i \end{vmatrix}} = \frac{(ix_0 - x_1)(-iy_0 - y_1)}{(-ix_0 - x_1)(iy_0 - y_1)} = \frac{x_0y_0 + x_1y_1 - i(x_0y_1 - x_1y_0)}{x_0y_0 + x_1y_1 + i(x_0y_1 - x_1y_0)}$$

Nyní využijeme toho, že $x = [x_0 : x_1] = [\cos\varphi(x) : \sin\varphi(x)]$ a obodobně pro y, a označíme $\omega = \varphi(y) - \varphi(x)$. Pak zřejmě

$$\cos\omega = \cos\varphi(y)\cos\varphi(x) + \sin\varphi(y)\sin\varphi(x) = \sigma(x_0y_0 + x_1y_1)$$

$$\sin\omega = \sin\varphi(y)\cos\varphi(x) - \cos\varphi(y)\sin\varphi(x) = \sigma(x_0y_1 - x_1y_0)$$

kde σ je společný násobek vzniklý převodem mezi homogenními souřadnicemi x i y (rozmyslete).

Dosazením dostáváme

$$(xyzt) = \frac{\cos\omega - i\sin\omega}{\cos\omega + i\sin\omega} = \frac{e^{-i\omega}}{e^{i\omega}} = e^{-2i\omega}$$

Aplikací funkce Log (hlavní větev logaritmu) jakožto inverzní funkce k exponenciále v komplexním oboru dostáváme

$$\operatorname{Log}(xyzt) = -2i\omega$$

a tedy

$$\omega = \frac{i}{2}\operatorname{Log}(xyzt),$$

což je tzv. Laguerrův vzorec.

Tento vzorec může být poněkud překvapující, neboť úhel mezi dvěma přímkami ve svazku je zde vyjádřen pomocí dvojpoměru, kde zbylé dvě přímky z, t jsou imaginární, Log je komplexní funkce komplexní proměnné a její hodnota se nakonec násobí komplexním číslem i, přesto, uvažujeme-li reálné přímky x, y (tj. s reálnými souřadnicemi), je úhel ω mezi nimi nutně reálné číslo.

Pro obecnou volbu kvadriky budeme zavádět míru jako

$$\mu = \frac{c}{2}\operatorname{Log}(xy\xi\xi'),$$

kde ξ, ξ' jsou body kvadriky, tzv. absolutní body. Ty se pak ukážou být body v nekonečné vzdálenosti a pro případ hyperbolické přímky dojde k tomu, že nám tyto dva reálné(!) body rozdělí přímku na dvě části, v každé z nichž jsou vzdálenosti reálné a mezi nimiž navzájem jsou vzdálenosti imaginární.

Tímto způsobem dostaneme tzv. Beltramiho–Kleinův model hyperbolické roviny, kde celá rovina je znázorněna jako kruh a přímky se jeví jako přímky. Často se setkáváme s jinými modely, např. s Poincarého polorovinným modelem, který byl uveden např. v minisérii Dalibora Šmída. V tomto modelu se pohyby jeví jako Möbiovy transformace. O neeuklidovské geometrii by se dalo mluvit ještě dlouho, a také bychom mohli ukázat, jak vypadají příslušné pohybové grupy v různých modelech, ale to zase při nějakém dalším setkání.

Lukáš Krump, 1.4.2015