Variace na invarianci, LS 15/16

Přehled přednášky DŠ, domácí úkoly

Přehled:

- Matematické kyvadlo - čtvrtperioda je úplný eliptický integrál 1. druhu
$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{\omega}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$
- Elipsa - čtvrtina obvodu je úplný eliptický integrál 2. druhu
$$\frac{L}{4} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt = \frac{1}{\omega}\int_0^1 \frac{(1-k^2z)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$
- Bernoulliho lemniskáta - čtvrtina obvodu je eliptický integrál
$$\frac{\Omega}{2} = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$$
- Parametrizace kružnice ve tvaru $(f(u), f'(u))$ zobecněná na křivky s rovnicí $y^2 = p(x)$ definicí
$$u = f^{-1}(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{p(t)}}$$
- Lemniskátový sinus $\mathrm{sl}(u)$ a jeho perioda 2Ω, lichost, Fagnanova formule pro $\mathrm{sl}(2u)$, Eulerovy součtové vzorce, dvojitá periodicita.
- Weierstrassova $\wp$-funkce, eliptické invarianty.
- Racionální body na kružnici, pythagorejské trojice.
- Diofantova metoda tětiv a tečen na kvadrikách a kubikách.
- Descartův list a jeho racionální parametrizace, kubiky genu 0 a 1.
- Geometrické vyjádření součtového vzorce pro goniometrické funkce.
- Eulerovo vyjádření kotangens pomocí řady, Eisensteinovo vyjádření funkce $\wp$.
- Grupový isomorfismus toru a eliptické křivky.
- Konstruovatelnost pravidelných n-úhelníků a dělitelnost oblouku lemniskáty.
- Aritmeticko-geometrický průměr a jeho vztah k délce lemniskáty.

Domácí úkoly:

1. (2b) Odvoďte ekvivalenci různých definic Bernoulliho lemniskáty - řez toru, množina bodů s konstantním součinem vzdáleností od dvou ohnisek, „odmocnina z kružnice“ procházející počátkem v $\mathbb{C}$, rovnice v kartézských souřadnicích, rovnice v polárních souřadnicích.

2. (2b) Parametrizujte jednotkovou kružnici pomocí druhého průsečíku s přímkou procházející bodem $(0,-1)$ a se směrovým vektorem $(t,1)$. Parametrizujte obdobným způsobem jednotkovou sféru.
3. (2b) Dokažte pomocí vzorce

$$\int_0^x = \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

kde

$$z = \frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2},$$

že

$$\mathrm{sl}(u+v) = \frac{\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{sl}'(v) + \mathrm{sl}(v)\,\mathrm{sl}'(u)}{1+\mathrm{sl}^2(u)\,\mathrm{sl}^2(v)}$$

4. (2b) Najděte pomocí tečny v bodě $(0,1)$ racionální bod na kubické křivce

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = y^2$$

5. (1b) Pro funkci

$$\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x+n} := \frac{1}{x} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2x}{x^2-n^2}$$

dokažte, že $\phi(1/2) = 0$.
6. (2b) Dokažte, že jsou-li $P_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ a $P_2 = (\cos\beta, \sin\beta)$ dva body na kružnici, pak bod $P_1 + P_2 := (\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ je průsečíkem kružnice a rovnoběžky k přímce P_1P_2 vedené bodem $(1,0)$. Formulujte a dokažte limitní verzi tohoto tvrzení pro případ $P_1 = P_2$.
7. (2b) Dokažte, že všechny pythagorejské trojice lze vyjádřit ve tvaru

$$a = 2pqr, b = (p^2-q^2)r, c = (p^2+q^2)r,$$

kde $p, q, r \in \mathbb{Z}$

Literatura:

- Stillwell - Mathematics and Its History
- Nekovář - `https://webusers.imj-prg.fr/~jan.nekovar/co/ln/el/el1.pdf`