Variace na invarianci, LS 14/15

Přehled přednášky DŠ, domácí úkoly

Přehled:

- Definice Mœbiovské transformace, rozklad na elementární transformace, zadání na třech bodech
- Kruhová inverze, její působení na přímkách a kružnicích, konformní a antikonformní zobrazení
- Mœbiovské transformace jako maticová zobrazení na $\mathbb{C}^2$, Mœbiova grupa.
- Hyperbolická geometrie - Poincarého model na kruhu a na polorovině, vztah mezi nimi, hyperbolické přímky a reflexe podle nich.
- Pevné body Mœbiovských transformací - parabolické, eliptické, hyperbolické, loxodromické transformace.
- Stereografická projekce, její vztah ke kruhové inverzi, souvislost modelů hyperbolické geometrie (Beltramiho-Kleinův model na kruhu, hyperboloid, polosférický model)
- Párování kružnic, Kleinovy grupy, jejich limitní množiny, ukázky jejich fraktálního tvaru, Appoloniovy kruhy.

Domácí úkoly:

1. (2b) Dokažte, že pro každé dvě trojice (z_1, z_2, z_3) a (w_1, w_2, w_3) vzájemně různých bodů $\mathbb{C}^*$ existuje právě jedna Moebiovská transformace, která zobrazuje $z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$, $z_3 \to w_3$. (Na přednášce byla existence, stačí dokázat jednoznačnost). Tohoto výsledku se dá využít k určení, zda čtyři body z_1, z_2, z_3, z_4 v rovině $\mathbb{C}$ leží na kružnici. Stačí sestrojit Mœbiovskou transformaci, která převádí z_1, z_2, z_3 na $0, 1, \infty$. Domyslete detaily a vyzkoušejte pro čtveřici $i, 1+4i, 3, 4+3i$.
2. (2b) Dokažte s pomocí kruhové inverze, že pro čtyřúhelník $ABCD$, který je vepsaný kružnici, platí $|AC||BD| = |AB||CD| + |AD||BC|$ (Ptolemaiova věta). Z Ptolemaiovy věty odvoďte a) součtové vzorce pro sinus b) poměr délek strany a úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku.
3. (1b) Ukažte, že pro libovolné dva kruhy v rovině existuje Mœbiovská transformace, která zobrazuje vnitřek jednoho na vnějšek druhého.
4. (1b) Pro Mœbiovské zobrazení dané maticí $A \in SL(2, \mathbb{C})$ charakterizujte parabolické, eliptické, hyperbolické a loxodromické transformace pomocí stopy.
5. (2b) Odvoďte vzorce pro hyperbolickou stereografickou projekci mezi jednotkovým diskem a polovinou dvojdílného hyperboloidu. Ukažte, že stereografická projekce zobrazuje řezy hyperboloidu rovinami jdoucími počátkem na hyperbolické přímky a naopak.

6. (1b) Odvoďte vzorec pro stereografickou projekci bodu na sféře zadaného sférickými souřadnicemi.
7. (3b) Dokažte, že pro Appoloniovy kruhy (čtyři kružnice, dotýkající se v maximálním možném počtu šesti bodů) platí

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right),$$

   kde a, b, c, d jsou poloměry kružnic.

Literatura:

- Brannan, Esplen, Gray: Geometry - pasáže o hyperbolické geometrii
- Mumford, Series, Wright: Indra's Pearls - pasáže o Kleinových grupách
- Penrose, Rindler: Spinors and Spacetime - (neprobrané) aplikace ve speciální teorii relativity