Variace na invarianci, LS 13/14

Přehled přednášky DŠ, domácí úkoly

Přehled:

- Definice Mœbiovské transformace, rozklad na elementární transformace, zadání na třech bodech
- Kruhová inverze, její působení na přímkách a kružnicích, konformní a antikonformní zobrazení, zachovávání symetrie podle jedné kružnice působením kruhové inverze vůči jiné kružnici, sférická inverze
- Stereografická projekce Riemannovy sféry na $\mathbb{C}^*$, její vyjádření jako sférické inverze, důkaz, že je konformní a že zachovává množinu kružnic a přímek
- Mœbiovské transformace jako maticová zobrazení na $\mathbb{C}^2$
- Pevné body transformace, hyperbolické, loxodromické, eliptické a parabolické transformace, jejich působení na komplexní rovině a na Riemannově sféře
- Párování kružnic, (Schottkyho) grupy generované čtyřmi kružnicemi, ukázky limitních množin.
- Grupa rotací a Lorentzova grupa, nebeská sféra
- Lorentzovy transformace jako Mœbiovské transformace nebeské sféry
- Příklad boostu ve směru osy z jakožto hyperbolické Mœbiovy transformace.

Domácí úkoly:

1. (1b) Dokažte, že pro každá dvě trojice (z_1, z_2, z_3) a (w_1, w_2, w_3) vzájemně různých bodů $\mathbb{C}^*$ existuje právě jedna Moebiovská transformace, která zobrazuje $z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$, $z_3 \to w_3$. (Na přednášce byla existence, stačí dokázat jednoznačnost)
2. (1b) Dokažte s pomocí kruhové inverze, že pro čtyřúhelník $ABCD$, který je vepsaný kružnici, platí $|AC||BD| = |AB||CD|+|AD||BC|$ (Ptolemaiova věta)
3. (1b) Pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ napište vzorec pro bod (X, Y, Z) na sféře Σ takový, že z je stereografickou projekcí (X, Y, Z).
4. (1b) Dokažte, že zobrazení $z \to 1/z$ na $\mathbb{C}$ indukuje pomocí stereografické projekce rotaci sféry Σ o úhel π kolem reálné osy.
5. (1b) Ukažte, že pro libovolné dva kruhy v rovině existuje mœbiovská transformace, která zobrazuje vnitřek jednoho na vnějšek druhého.
6. (2b) Najděte mœbiovské zobrazení K, které zobrazuje bod 0 na bod -1, bod ∞ na bod 1 a bod 1 na bod $-i$, tzv. Cayleyho zobrazení. Dokažte, že

$K^3 = Id$. Dokažte, že

$$K \; SL(2,\mathbb{R}) \; K^{-1} = SU(1,1),$$

kde

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} | \, |u|^2 - |v|^2 = 1 \right\}$$

Dokažte, že $SL(2,\mathbb{R})$ zachovává horní polorovinu a $SU(1,1)$ jednotkovou kružnici.

7. (1b) Odvoďte vzorec pro stereografickou projekci bodu na sféře zadaného polárními souřadnicemi.
8. (2b) Odvoďte matice Mœbiovských transformací, jimž příslušná Lorentzova transformace je rotace kolem osy z a rotace kolem osy y.