Úvodní kurz z matematiky

Sada úloh Posloupnosti a důkazy, ZS 2016/17

(1) S využitím Pascalova trojúhelníku (resp. příslušné identity pro kombinační čísla) dokažte, že

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$$

(2) Označme $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$ součet aritmetické posloupnosti $(a_1, \ldots, a_n)$, d její diferenci. Určete

(a) d, a_1, a_8, s_{11}, pokud je známo $a_4 = 6$ a $a_{11} = 34$.

(b) a_1, d, pokud je známo $s_5 = s_6 = 60$.

(3) Označme $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$ součet geometrické posloupnosti $(a_1, \ldots, a_n)$, q její kvocient. Určete

(a) q, a_1, s_6, pokud je známo $a_2 = 48$ a $a_5 = 162$.

(b) a_6, s_8, pokud je známo $a_3 = 1$ a $q = \frac{1}{3}$.

(4) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti

(a) přímým důkazem,

(b) matematickou indukcí

(5) Uvažujme tvrzení „Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že pokud $x^3 + 2x + 33 \neq 0$, pak $x \neq -3$." Formulujte k tomuto tvrzení

(a) negaci,

(b) obměnu implikace,

(c) opačnou implikaci.

Jednotlivé výroky dokažte, popřípadě vyvraťte.

(6) Dokažte, že $\sqrt{3}$ je iracionální číslo.

(7) Jakého typu je následující důkaz?

Věta 1. *Existuje nekonečně mnoho prvočísel.*

Důkaz. Nechť $p_1, \ldots, p_n$ jsou všechna existující prvočísla. Číslo $k := p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ má alespoň jeden prvočíselný dělitel p. Toto p nemůže být ani jedním z prvočísel $p_1, \ldots, p_n$, neboť pak by bylo číslo $k - p_1 p_2 \ldots p_n = 1$ dělitelné p. □

(8) * Uvažujme 10-prvkovou množinu M přirozených čísel ≤ 23. Dokažte s využitím Dirichletova principu, že v M existují dvě dvojice p, q, r, s, pro něž $p + q = r + s$.

(9) Fibonacciho posloupnost je definovaná rekurentním předpisem $a_1 = a_2 = 1$ a $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

(10) Dokažte matematickou indukcí, že $\forall n \in \mathbb{N}$

(a) $10^n - 4$ je dělitelné šesti

(b) $2^n > n$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(11) * V rovině uvažujme množinu n přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Určete, na kolik oblastí tato množina přímek rozděluje rovinu a dokažte matematickou indukcí.

(12) * Podél kruhové dráhy délky 1 je náhodně rozmístěno n aut, každé z nich má v nádrži náhodné množství benzínu. Kdyby se všechen benzín ze všech aut slil do jednoho z nich, pak by stačil na ujetí vzdálenosti $1 + \epsilon$, kde $\epsilon > 0$. Dokažte, že si řidič může zvolit jedno z aut a postupně s přesedáním do dalších aut podél dráhy dojet objet celou dráhu až do výchozího bodu.