Lineární algebra a geometrie pro matematiky - LS 08/09

Příklady 8 - Jordanův tvar matice

1. Určete Jordanův tvar matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Najděte Jordanův tvar matice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

3. Najděte Jordanův tvar matice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

4. Určete pro libovolné celé n matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^n$

5. Určete $\exp \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6. Určete $\exp \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

7. Spočítejte $\sin \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$

8. Určete Jordanův tvar matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Zjistěte, zda jsou podobné matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a pokud ano, najděte matici C splňující $CAC^{-1} = B$.

10. Zjistěte, zda jsou podobné matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a pokud ano, najděte matici C splňující $CAC^{-1} = B$.

11. Vypočítejte J_λ^n, kde J_λ je Jordanova buňka řádu k vzhledem k vlastnímu číslu λ (tedy matice mající λ na diagonále, 1 nad diagonálou a jinde nuly).

12. Najděte $\exp J_{\lambda,k}$, tedy Jordanovy buňky stupně k s vlastním číslem λ na diagonále.

13. (Bonus) Nechť f je nilpotentní endomorfizmus konečnědimenzionálního prostoru V řádu n. Definujme M_n libovolnou bázi doplňku W_n prostoru $\operatorname{Ker} f^{n-1}$ ve V. Ukažte, že množina $M^n := \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(M)$ je lineárně nezávislá. Definujme pro $0 \leq k \leq n-1$ symbolem M_k nějakou bázi doplňku W_{k-1} prostoru $\operatorname{Ker} f^{k-2}$ v $\operatorname{Ker} f^{k-1}$ a dále $M^k := \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(M)$. Dokažte, že $\bigcup_{i=1}^{n} M^i$ je báze V.

14. (Bonus) Nechť $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla endomorfizmu f vektorového prostoru V konečné dimenze. Definujme $f_{\lambda_i} := (f - \lambda_i \operatorname{id})$ pro všechna i a $\operatorname{Ker}_{\lambda_i} f$ prostor $\operatorname{Ker} f_{\lambda_i}^k$ pro takové k, pro nějž se už rovná $\operatorname{Ker} f_{\lambda_i}^{k+1}$. Dokažte, že $\bigoplus_{i=1}^m \operatorname{Ker}_{\lambda_i} = V$. Návod: Dokažte, že $f_{\lambda_m}|_{\operatorname{Ker}_{\lambda_m}}$ je nilpotentní endomorfizmus a že existuje doplněk W_m prostoru $\operatorname{Ker}_{\lambda_m}$ ve V takový, že $f|_{W_m}$ je endomorfizmus. Dokažte, že $f|_{W_m}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ a pak postupujte indukcí přes počet různých vlastních čísel zobrazení f.

15. (Bonus) Zaveďte na množině čtvercových matic stupně n normu vztahem $\|A\|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$ (ověřte, že je to norma). Ukažte, že $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ a pomocí toho, že řada $\sum_0^\infty A^i/i!$ konverguje pro libovolnou matici A. Tedy $\exp A$ je dobře definovaná funkce.

16. (Bonus) Nechť A je čtvercová matice stupně n a $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ funkce (nebo vektor funkcí, chcete-li) $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ splňující soustavu lineárních diferenciálních rovnici $x'(t) = Ax(t)$. Dokažte, že $x(t) = x(0) \exp(At)$. Vyřešte takto soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= -x + 3y \end{aligned}$$