Lineární algebra a geometrie pro matematiky - LS 08/09

Příklady 7 - Projektivní prostor

1. Najděte všechny kolineace K prostoru $P(\mathbb{R}^2)$, které splňují
   (a) $K(\langle(1,0)\rangle = \langle(1,2)\rangle$, $K(\langle(0,1)\rangle = \langle(1,2)\rangle$
   (b) $K(\langle(1,0)\rangle = \langle(0,1)\rangle$, $K(\langle(0,1)\rangle = \langle(1,0)\rangle$
2. Najděte samodružné body kolineace prostoru $P(\mathbb{R}^3)$, určené automorfizmem
   $$f((x_1,x_2,x_3)) = (5x_1+6x_2+4x_3, -3x_1-4x_2-4x_3, 2x_1+4x_2+5x_3)$$
3. Najděte samodružné body kolineace prostoru $P(\mathbb{R}^4)$, určené automorfizmem
   $$f((x_1,x_2,x_3,x_4)) =$$
   $$(x_1-3x_2+3x_4, -2x_1-6x_2+13x_4, -3x_2+x_3+3x_4, -x_1-4x_2+8x_4)$$
4. Napište předpis projektivní roviny v projektivním rozšíření prostoru $A(\mathbb{R}^3)$, obsahující body $[1,0,2]$, $[2,3,-1]$ a $[0,0,1]$.
5. Určete kolineaci K projektivního rozšíření afinní přímky, pro niž $K([1]) = \langle(2)\rangle$, $K([2]) = [3]$, $K(\langle(3)\rangle) = [4]$.
6. Určete kolineaci K projektivního rozšíření afinní přímky, pro niž $K([3]) = \langle(2)\rangle$, $K([2]) = [1]$, $K(\langle(3)\rangle) = [4]$ a najděte její samodružné body.
7. Určete kolineaci K projektivního rozšíření prostoru $A(R^3)$ tak, aby platilo $K((0,0,0)) = (0,0,0)$, $K(\langle(2,3,1)\rangle) = \langle(1,0,2)\rangle$, $K(\langle(0,0,1)\rangle) = \langle(0,0,1)\rangle$ a $K^2 = Id$.
8. Ukažte, že každý podprostor projektivního rozšíření $\bar{A}_n(\overline{V}_{n+1})$ je bud podprostorem nevlastní nadroviny, nebo projektivním rozšířením nějakého podprostoru afinního prostoru $A_n(V_n)$.
9. Buď K neidentická kolineace reálné projektivní přímky $P_1(V_2)$ vytvořená automorfismem f prostoru V_2 a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ buď matice automorfismu f vzhledem k bázi M prostoru V_2. Označíme-li $D = (a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4\det A$, pak dokažte, že platí:

(a) kolineace K nemá samodružné body, právě když D je záporné (eliptická kolineace)

(b) kolineace K má právě jeden samodružný bod, právě když $D = 0$ (parabolická kolineace)

(c) kolineace K má právě dva samodružné body, právě když D je kladné (hyperbolická kolineace)

10. Buď K hyperbolická kolineace reálné projektivní přímky $P_1(V_2)$ a buďte $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$ její samodružné body. Dokažte, že existuje číslo $\lambda \in R$ tak, že $0 \neq \lambda \neq 1$ a že bod $\langle w' \rangle$ je obrazem bodu $\langle w \rangle$ pri kolineaci K, $\langle w \rangle \neq \langle u \rangle$, $\langle w \rangle \neq \langle v \rangle$, právě když $(u, v, w, w') = \lambda$.

11. Buďte $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$, $\langle w \rangle$ tři různé body reálné projektivní přímky $P_1(V_2)$. Ukažte, že existuje právě jedna parabolická kolineace přímky P_1, jejímž samodružný bodem je $\langle u \rangle$ a $K(\langle v \rangle) = \langle w \rangle$.

12. Spočtěte dvojpoměr bodů $[2, -1, 3]$, $[4, -5, 7]$, $[1, 1, 1]$, $[3, -3, 5]$ prostoru $A(\mathbb{R}^3)$.