Lineární algebra a geometrie pro matematiky - LS 08/09

Příklady 6 - Euklidovský prostor

1. V E_3 najděte nejkratší příčku mimoběžek $[0,0,-4]+\langle(1,2,4)\rangle$, $[-3,-2,6]+\langle(2,-1,3)\rangle$ a spočtěte jejich vzdálenost.
2. V E_4 určete vzdálenost přímek $[7,5,8,1]+\langle(2,0,3,1)\rangle$ a $[5,-1,3,3]+\langle(4,-2,1,0)\rangle$.
3. Najděte bod stejně vzdálený od rovin $x+2y+z+1=0$, $x+2y+z-3=0$, který leží na průsečnici rovin $x+y+z-2=0$, $x+2y-1=0$
4. Určete přímku, která prochází počátkem, protíná přímku $[4,3,1]+\langle(1,4,-3)\rangle$ a svirá s ni úhel $30°$
5. Najděte rovinu, která obsahuje průsečnici rovin $5x+y+z=0$, $y-z+4=0$ a s rovinou $4x-y+8z-12=0$ svírá úhel $45°$.ˇ
6. Průsečíkem přímky $[12,9,1]+\langle(4,3,1)\rangle$ a roviny $3x+5y-z-2=0$ veďte kolmici k rovině $x-y+6z+4=0$.
7. V euklidovském prostoru E_4 určete vzdálenost bodu $[-9,2,1,-5]$ od roviny $[1,2,0,0]+\langle(-1,1,1,3),(0,-2,1,-1)\rangle$.
8. V E_4 určete vnější součin vektorů $(1,1,0,0)$,$(2,0,1,2)$ a $(-3,0,0,2)$.
9. Nechť $u,v,w\in E_3$. Dokažte identitu $u\times(v\times w)=v(u.w)-w(u.v)$, kde tečka označuje skalární součin.
10. Nechť $u,v\in E_3$. Dokažte identitu $\|u\times v\|^2+|u.v|^2=\|u\|^2\|v\|^2$.
11. (Bonus) Dokažte, že vektorový součin v E_3 splňuje $a\times b=-b\times a$ (antisymetrie) a

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$$

(Jacobiho identita). Vektorový prostor s bilineárním součinem splňujícím tyto dvě podmínky se nazývá Lieova algebra.