Lineární algebra a geometrie pro matematiky - LS 08/09

Příklady 4 - Funkce matic, ortonormální polární báze

1. Ukažte, že vlastní čísla součtu matic $A + B$ nejsou obecně součtem vlastních čísel A a B, ale že součet všech vlastních čísel $A+B$ se rovná součtu všech vlastních čísel matice A a všech vlastních čísel matice B.
2. Nechť B má vlastní čísla 1,2,3, C má vlastní čísla $4, 5, 6$ a D má vlastní čísla $7, 8, 9$. Jaká vlastní čísla má matice 6×6 tvaru
$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
3. V prostoru reálných polynomů stupně nejvýše 2 najděte bázi, v níž je matice zobrazení T, které reálnému polynomu $f(x)$ přiřazuje polynom $(Tf)(x) = f(0) + f(1)(x + x^2)$, diagonální.
4. Spočítejte matici
$$\sin \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$$
.
5. Určete limitu
$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{4^m} \begin{pmatrix} 7 & -9 & -15 \\ 3 & 7 & 3 \\ 3 & -9 & -11 \end{pmatrix}^m$$
6. Každý rok se 1/10 z celkových K obyvatel Kocourkova odstěhuje do Tramtárie a 1/5 z celkových T obyvatel Tramtárie se zase odstěhuje do Kocourkova. Kdo se neodstěhuje, zůstává na místě. Určete matici zobrazení, které přiřazuje vektoru (K, T) vektor počtu obyvatel příští rok a poté určete, kolik obyvatel bude kde bydlet až naprší a uschne (tj. za 42 let).
7. V $\mathbb{R}^2$ najděte ortonormální polární bázi kvadratické formy $f_2(u) = -4x_1x_2$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.
8. V $\mathbb{R}^2$ najděte ortonormální polární bázi kvadratické formy $f_2(u) = -4x_1x_2$, je-li skalární součin zadán kvadratickou formou $g_2(u) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$.

9. V $\mathbb{R}^3$ najděte ortonormální polární bázi kvadratické formy $f_2(u) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_2x_3$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

10. V $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem g najděte ortonormální polární bázi kvadratické formy $f_2(u) = -4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2$, přičemž $g_2(u) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$.

11. Ukažte, že každou symetrickou pozitivně definitní matici B lze zapsat jako $B = A^T A$ pro nějakou matici A.

12. (Bonus) Označme $O(n) := \{A \in M(n \times n) | A^T A = E\}$ a $SO(n) := O(n) \cap \{A | \det A = 1\}$. Ukažte, že pro libovolná matice $A \in SO(3)$ zachovává nějaký vektor $v \in \mathbb{R}^3$ a v rovině na něj kolmé působí jako rotace o úhel $\frac{1}{2}(\operatorname{Tr} A - 1)$.

13. (Bonus) Nechť f je endomorfizmus $\mathbb{R}^n$ s maticí A. Uvažujme na $\mathbb{R}^n$ standardní skalární součin. Ukažte, že $A \in O(n)$ právě když $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \|f(x)\|$. Na komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{C}^n$ je standardní skalární součin zaveden jako tzv. seskvilineární forma $(x, y) := \sum x_i \bar{y}_i$, kde pruh značí komplexní sdružení, norma $\|x\|$ je opět $\sqrt{(x, x)}$. Jak je popsána množina matic A, pro něž $\|x\| = \|Ax\|$? Jakých hodnot může nabývat determinant těchto matic?

14. (Bonus) Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}^n$ je posloupnost vektorů, definujme operátor první diference takto: $(\Delta f)_j(i) := f_j(i+1) - f_j(i)$ a násobení maticí A klasicky takto: $(Af)_j(i) = \sum a_{jk} f_k(i)$. Ukažte, že soustava diferenčních rovnic prvního řádu $\Delta f = Af$ má řešení $f(i) = (A + E)^i f(0)$. Ukažte, že rekurentní relaci tvaru $g(i+m) + \sum_{k=0}^{m-1} b_k g(i+k) = 0$, kde $g : N \to C$ lze převést na soustavu m diferenčních rovnic prvního řádu.

15. (Bonus) Nechť A je čtvercová matice stupně n, jejíž vlastní čísla jsou navzájem různá. Dokažte, že soustava diferenciálních rovnic tvaru $y_i'(t) = \sum a_{ij} y_j(t)$ pro n reálných funkcí $y_i(t)$ má řešení ve tvaru $y_j(t) = \sum_k b_{jk} e^{\lambda_k t}$, kde λ_k jsou vlastní čísla matice A a B je nějaká reálná matice.