Lineární algebra a geometrie pro matematiky - LS 08/09

Příklady 3 - Zbytek skalárního součinu, vlastní čísla

1. Buď (V_3, g) unitární prostor a buď $g(u,v) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_2 + x_2y_3$ analytické vyjádření g vůči bázi M prostoru V_3. Najděte vektor $w \in V_3$ ležící v ortogonálním doplňku podprostoru $\langle u, v\rangle$, $\{u\}_M = (1,1,1)$, $\{v\}_M = (1,2,3)$, pro který $g_2(w) = 1$.
2. V prostoru (R^4, ω) najděte ortogonální doplněk podprostoru $\langle (1,0,1,0), (0,1,0,1)\rangle$.
3. Nechť $\{v_1, \dots, v_k\}$ je ortonormální báze podprostoru W v prostoru V se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)$. Ukažte, že zobrazení $P_W : V \to V$ definované vztahem $P_W(v) = \sum_1^k (v_k, v)v_k$ má následující vlastnosti:
   (a) P_W je lineární
   (b) $\operatorname{Im} P_W = W$ a $\operatorname{Ker} P_W = W^\perp$, $h(P_W) = k$
   (c) $P_W \circ P_W = P_W$ neboli P_W je identita na $\operatorname{Im} P_W$

   Zobrazení P_W se nazývá ortogonální projekce na podprostor W.
4. Nechť $V = \mathbb{R}^3$, $U = \langle (u_1, u_2, u_3)\rangle$, $W = \langle (1,0,1), (1,1,0)\rangle$ a P_U, P_W jsou jako v předchozím příkladě. Najděte matici P_U a P_W vzhledem ke kanonické bázi a matici P_W vzhledem k bázi $W = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,0,1)\}$.
5. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 20 & -11 \end{pmatrix}$$
6. Najděte matici C, aby $A = CBC^{-1}$, kde A je z předchozí úlohy a
$$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$
7. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice
$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$
8. Dokažte, že A^T má stejná vlastní čísla jako A, ale vlastní vektory se obecně liší.

9. Ověřte, že pokud $A = CBC^{-1}$, pak $A^n = CB^nC^{-1}$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Pomocí této vlastnosti ukažte, že pokud má A vlastní vektor v s vlastním číslem λ, pak A^n má stejný vlastní vektor v s vlastním číslem λ^n. Speciálně spektrum inverzní matice je složeno z převrácených hodnot spektra matice A.

10. Pomocí předchozí úlohy určete n-tou mocninu matice z úlohy 5 pro všechna n.

11. Fibonacciho posloupnost je zadaná rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ a počáteční podmínkou $a_0 = a_1 = 1$. Pomocí maticového zápisu

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

a úlohy 9 určete vztah pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti.

12. Popište koeficienty charakteristického polynomu matice A jako součty určitých subdeterminantů a spočítejte pomocí toho charakteristický polynom a vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

13. (Bonus) Nechť $x := (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ a $y := (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ jsou pevně zvolené vektory. Chápejme je jako naměřené hodnoty nějaké závislosti (v bodě x_i funkční hodnota y_i). Uvažujme na $\mathbb{R}^N$ skalární součin a v tomto podprostoru množinu $M = \{(ax_1 + b, ax_2 + b, \ldots, ax_N + b) | a, b \in \mathbb{R}\}$. Ověřte, že se jedná o podprostor a najděte v něm vektor (určený hodnotami a a b), který je ortogonální projekcí vektoru y na M. Vyjádřete a a b pomocí skalárních součinů a norem vektorů x a y. Právě jste "objevili" lineární regresi.

14. (Bonus) Dokažte, že $Tr(A^m) = \sum \lambda_i^m$, kde λ_i jsou vlastní čísla A. Pokud to nebudete umět obecně, zkuste alespoň pro A diagonalizovatelnou.

15. (Bonus, trochu náročnější) Označme koeficienty charakteristického polynomu vyjádřením $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + D_1\lambda^{n-1} + \ldots + D_n$. S pomocí předchozího tvrzení a Vietových vztahu pro D_i dokažte rekurentní formuli

$$mD_m + D_{m-1}Tr(A) + D_{m-2}Tr(A^2) + \ldots + Tr(A^m) = 0, 1 \leq m \leq n$$

Využijte toho k napsání charakteristického polynomu ve stupni 3 a 4 pouze pomocí stop mocnin A.

16. (Bonus) Dokažte, že $p(\sigma(A)) = \sigma(p(A))$, tedy nejprve, že pro každé vlastní číslo λ matice A je $p(\lambda)$ vlastním číslem matice $p(A)$, a poté naopak. Předpokládejte, že všechny polynomy jsou úplně rozložitelné (tedy např. nad tělesem komplexních čísel).

17. (Bonus) Hamilton-Cayleyova věta říká, že $\chi_A(A) = 0$, tedy, že když dosadíme matici A do jejího charakteristického polynomu (a chápeme absolutní člen jako násobek jednotkové matice), dostaneme nulovou matici. Využijte této věty pro řešení úlohy 10 bez nutnosti počítat vlastní čísla a vlastní vektory matice.