Lineární algebra a geometrie pro matematiky - LS 08/09

Příklady 2 - Sylvestrovo kritérium, skalární součin

1. Ukažte, že na komplexním vektorovém prostoru zákon setrvačnosti kvadratických forem neplatí, tedy že daná symetrická bilineární forma může mít vzhledem k různým polárním bázím různé signatury.
2. Pomocí Sylvestrova kritéria určete signaturu kvadratické formy f_2 zadané analytickým vyjádřením vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ vztahem $f_2(u) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$
3. Pomocí Sylvestrova kritéria určete signaturu kvadratické formy f_2 zadané analytickým vyjádřením vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ vztahem $f_2(u) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2$
4. Je dáno analytické vyjádření kvadratické formy f_2 vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, aby forma f_2 byla pozitivně definitní, přičemž $f_2(u) = 2x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.
5. Nechť (V, g) je prostor se skalárním součinem. Dokažte, že skalární součin dvou vektorů se dá napsat pouze pomocí norem:
$$g(u, v) = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|_g^2 - \|u\|_g^2 - \|v\|_g^2\right)$$
6. Zjistěte, které z následujících bilineárních forem jsou skalární součiny na $\mathbb{R}^3$:
$$g(u, v) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 - x_3y_3$$
$$g(u, v) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$$
$$g(u, v) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$
7. Buď (V_3, g) unitární prostor a buď $g(u, v) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_2 + x_2y_3$ analytické vyjádření g vůči bázi M prostoru V_3. Najděte ortogonální bázi $\{u_1, u_2, u_3\}$ prostoru (V_3, g), která obsahuje vektor u_1 o souřadnicích $\{u_1\}_M = (1, 2, 0)$. Spočtěte $g_2(u_i)$, $i = 1, 2, 3$. Najděte příslušnou ortonormální bázi.

8. Na stejném prostoru se stejným skalárním součinem najděte ortonormální bázi podprostoru $\langle u, v\rangle$, $\{u\}_M = (5, 1, -1)$, $\{v\}_M = (0, 1, -1)$ a rozšiřte ji na ortonormální bázi prostoru (V_3, g).
9. V unitárním prostoru (R^4, ω) nalezněte ortonormální bázi podprostoru $\langle(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)\rangle$.
10. V unitárním prostoru (R^4, ω) nalezněte ortonormální bázi podprostoru $\langle(1, -1, 2, 4), (1, -2, 2, 3), (2, -2, 5, 7)\rangle$ obsahující kladný násobek vektoru $(1, 0, 2, 5)$.
11. (Bonus) Označme P^n prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše n na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Dokažte, že zobrazení

$$\begin{aligned}(\cdot, \cdot) :&P^n \times P^n \to \mathbb{R}\\ p \times q \to& \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx\end{aligned}$$

je skalární součin na P^n. Ortogonalizací báze $\{1, x, x^2\}$ najděte ortonormální bázi prostoru P^2 s tímto skalárním součinem.
12. (Bonus) Pro všechna $n \in \mathbb{Z}_0^+$ zaveďme polynomy

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n)$$

Dokažte, že množina $\{P_0, P_1, \dots P_n\}$ tvoří ortogonální bázi prostoru všech polynomů stupně nejvýše n. Dokažte, že jsou to až na násobek právě ty polynomy, které získáte ortogonalizací báze $\{1, x, \dots, x^n\}$. Budete potřebovat umět integrovat per partes.
13. (Bonus) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení a g je skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Dokažte, že množina všech lineárních zobrazení, která zachovávají skalární součin, tj. splňují $g(u, v) = g(f(u), f(v))$, je grupa. Pro $g = \omega$ charakterizujte matice zobrazení z této množiny vzhledem ke kanonické bázi. Určete, jakých hodnot může nabývat determinant těchto matic.