Lineární algebra a geometrie pro matematiky - LS 08/09

Příklady 1 - Bilineární formy

1. Bilineární forma f na prostoru $\mathbb{Z}_7^2$ je dána analytickým vyjádřením vzhledem k bázi $M = \{(1,2),(3,2)\}$ jako $f(u,v) = x_1y_1 + 4x_1y_2 + 6x_2y_1 + 5x_2y_2$. Určete její analytické vyjádření vzhledem k bázi $N = \{(1,1),(1,0)\}$.
2. Pro f z předchozího příkladu a vektor $u = (2,1)$ najděte $\Phi_l^f(u)$ a $\Phi_p^f(u)$ vzhledem k bázi N.
3. Pro f z předchozího příkladu určete matici zobrazení Φ_l^f a Φ_p^f vzhledem k bázi M.
4. Určete levý a pravý vrchol bilineární formy na $\mathbb{R}^3$, jejíž analytické vyjádření je $f(u,v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 + 2x_3y_3$, navíc určete nulitu a hodnost formy f.
5. Najděte příklad bilineární formy, která není symetrická ani antisymetrická, a její levý vrchol je netriviální a zároveň identický s vrcholem pravým.
6. Najděte polární bázi kvadratické formy na $\mathbb{R}^3$ s analytickým vyjádřením $f_2(u) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3$ a vyjádřete f_2 vůči této bázi.
7. Najděte polární bázi kvadratické formy na $\mathbb{R}^3$ s analytickým vyjádřením $f_2(u) = 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ a vyjádřete f_2 vůči této bázi.
8. Najděte množinu všech symetrických bilineárních forem na $\mathbb{R}^2$, pro něž je báze $M = \{(1,2),(-1,2)\}$ polární. Popište tuto množinu pomocí matic vůči kanonické bázi.
9. Dokažte, že množina všech kvadratických forem $K(V_n)$ na vektorovém prostoru V_n nad $\mathbb{R}$ je vektorový prostor dimenze $n(n+1)/2$.
10. Dokažte, že nulita formy je korektně definovaná, tedy že nezávisí na volbě báze.
11. Dokažte tzv. rekonstrukční vzorec: Pokud f je reálná symetrická bilineární forma a f_2 jí příslušná forma kvadratická, pak pro libovolné vektory u, v platí $f(u,v) = \frac{1}{4}(f_2(u+v) - f_2(u-v))$.

12. (Bonus) Nechť V je komplexní vektorový prostor, pak zobrazení $f : V \times V \to \mathbb{C}$ se nazývá seskvilineární forma, pokud $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$, $f(u, v+w) = f(u, v)+f(u, w)$, $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v)$ a $f(u, \lambda v) = \lambda^* f(u, v)$, kde $u, v, w \in \mathbb{C}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, $*$ značí komplexní sdružení. Seskvilineární forma se nazývá hermitovská, pokud $f(u, v) = f(v, u)^*$ a antihermitovská, pokud $f(u, v) = -f(v, u)^*$. Ukažte, že libovolná seskvilineární forma se dá napsat jako součet hermitovské a antihermitovské formy, zjistěte, jak jsou charakterizovány matice hermitovských a antihermitovských forem a nalezněte analogii rekonstrukčního vzorce, tedy vyjádření $f(u, v)$ pomocí hodnot f_2 na nějakých lineárních kombinacích u a v. Zde $f_2(w)$ znamená opět $f(w, w)$.

13. (Bonus) Ukažte, že pro libovolnou symetrickou bilineární formu f existuje báze, vůči níž je matice formy f blokově diagonální, a buďto matice f nebo matice $-f$ má vůči této bázi tvar složený pouze z bloků typu (0), (1) a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

14. (Bonus) Ukažte, že pro libovolnou antisymetrickou bilineární formu f existuje báze, vůči níž je matice formy f blokově diagonální a je složena pouze z bloků typu (0) a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.