Matematická analýza pro matematiky - LS 06/07

Příklady 6 - Určitý integrál I

1. Spočtěte určitý integrál
$$\int_0^2 |1-x| \; dx$$
2. Spočtěte určitý integrál
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\epsilon\cos x}, \text{ kde } 0 \le \epsilon < 1$$
3. Spočtěte pomocí Riemannova integrálu limitu
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$
4. Pomocí Riemannova integrálu vypočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$
   Nápověda: logaritmus součinu je součet logaritmů.
5. Vypočtěte určitý integrál
$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \; dx$$
6. Dokažte, že je-li funkce f lichá, pak $\int_{-a}^{a} f(x) \; dx = 0$.
7. Pomocí rekurentního vztahu vypočtěte integrál
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \; dx$$
8. Opakovaným použitím metody per partes dokažte
$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \; dx = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!},$$
   kde m, n jsou přirozená. (Rozšíření na m, n reálná se říká Beta funkce.)

9. Definujme pro n nezáporné celé číslo n-tý Legendreův polynom vztahem

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Dokažte, že je to pro všechna n nenulový polynom stupně n, že pro všechna $k < n$ je $\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n$ polynom mající kořeny v -1 a 1 a pomocí metody per partes z toho odvoďte, že

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x) = \alpha(n)\delta_{mn},$$

čili že Legendreovy polynomy tvoří ortogonální bázi prostoru všech polynomů. (Poznámka - ve skutečnosti definice Legendreových polynomů obsahuje ještě multiplikativní faktor, který pro jednoduchost vynecháváme - ovlivňuje jen $\alpha(n)$. Sami si také rozmyslete, že jsou to stejné polynomy které dostanete Grammovou-Schmidtovou ortogonalizací báze $\{1, x, x^2, \ldots\}$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\ dx$)