Lineární algebra a geometrie pro matematiky - ZS 08/09

Příklady 8 - Aplikace determinantu

1. V determinantu

$$\begin{vmatrix} -13 & 19 & 31 & -29 & x \\ 7 & 33 & x^3 & 57 & 115 \\ -3 & 7 & 11 & 74 & x^4 \\ 37 & x^5 & 22 & -43 & 5 \\ 61 & 41 & -36 & x^2 & 666 \end{vmatrix}$$

(který lze vyjádřit jako polynom v x) určete koeficient u členu x^8.

2. Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

Zobecněte výsledek pro determinant řádu n.

3. Spočtěte determinant stupně n

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$$

4. Vypočtěte inverzní matici k matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

nejprve eliminační metodou a posléze ověřte s výpočtem elementů $(A^{-1})_{23}$ a $(A^{-1})_{33}$ pomocí adjungované matice.

5. Řešte pomocí Cramerova pravidla pro $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ soustavu rovnic s rozšířenou maticí

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 0 & c \\ 0 & c & a & b \\ c & 0 & b & a \end{array} \right)$$

6. Řešte pomocí Cramerova pravidla pro $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ soustavu n rovnic

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \ldots + x_n &= 1 \\ &\vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + ax_n &= 1 \end{aligned}$$

7. Dokažte, že množina všech regulárních matic řádu n tvoří grupu vůči násobení. Rozhodněte, zda tvoří grupu množina všech matic stupně n, které mají determinant roven jedné.

8. Dokažte, že determinant tzv. blokově diagonální matice

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{lk} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 0 & \ldots & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1l} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{l1} & \ldots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

je roven $\det A \det B$.

9. Najděte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

10. Řešte maticovou rovnici (všechny matice jsou čtvercové)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

11. Dokažte, že inverzní matice k regulární antisymetrické matici je antisymetrická.