Lineární algebra a geometrie pro matematiky - ZS 08/09

Příklady 7 - Permutace a determinanty

1. Rozložte následující permutaci na nezávislé cykly, určete znaménko a porovnejte výsledek se znaménkem získaným pomocí počtu inverzí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 12 & 10 & 8 & 3 & 11 & 16 & 4 & 5 & 15 & 6 & 14 & 7 & 2 & 9 & 17 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Spočtěte součin $(1523)(62)(137)(1234567)(152)$ v S_7. Pište rovnou jako rozklad na nezávislé cykly.

3. Pro
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 & 7 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$
spočtěte π^{1000}. Určete nejmenší $k > 100$, pro nějž $\pi^k = \pi$.

4. Najděte permutaci $X \in S_6$, která splňuje vztah $AXB = C$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Určete znaménko permutace
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n & 2 & 5 & 8 & \dots & \dots & 3n-1 & 1 & 4 & \dots & 3n-2 \end{pmatrix}$$

6. Charakterizujte permutace, pro které $\pi^{-1} = \pi$.

7. Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ je regulární matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & a & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & a & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Nad $\mathbb{Z}_5$ spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

9. Dokažte, že determinant antisymetrické matice lichého řádu je nula.

10. Spočtěte determinant řádu n

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

11. Spočtěte determinant řádu n

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

12. Spočtěte determinant řádu n

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

13. Jak se změní determinant, pokud matici pootočíme o 90 stupňů okolo středu matice? Zdůvodněte.