

Lineární algebra a geometrie pro matematiky - ZS 08/09

Příklady 6 - Spojení podprostorů, soustavy rovnic, hodnost matice

1. Nechť $V_1 = \langle \{(1, 1, 2, 0)\}, \{(6, 5, 4, 3)\} \rangle$ a $V_2 = \langle \{(2, 3, 1, 6)\}, \{(a, 2, 3, 4)\} \rangle$ jsou dva podprostory $(\mathbb{Z}_7)^4$. Určete dimenze $V_1, V_2, V_1 \vee V_2, V_1 \cap V_2$ v závislosti na $a \in \mathbb{Z}_7$.
2. Najděte dimenze prostorů $V, W, V \cap W, V \vee W \subset \mathbb{R}^5$ v závislosti na parametru λ , kde $V = \langle (3, -1, -2, 2, 1), (1, 4, 0, 1, -1), (\lambda, 6, -4, 6, 0) \rangle$, $W = \langle (1, -3, 2, -3, 0), (0, 0, 0, 1, 1) \rangle$.
3. Buďte W_1, W_2, W_3 podprostory v nějakém vektorovém prostoru V . Ukažte, že platí $W_1 \vee (W_2 \cap W_3) \subset (W_1 \vee W_2) \cap (W_1 \vee W_3)$ a najděte protipříklad ukazující, že obecně neplatí rovnost. (Všimněte si, že pokud bychom spojení nahradili sjednocením, rovnost by platila!)
4. Symetrická matice je taková, pro niž $A = A^T$, antisymetrická $A = -A^T$. Určete dimenzi vektorového prostoru všech symetrických matic a vektorového prostoru všech antisymetrických matic $n \times n$ vůči sčítání a násobení prvkem z T , kde T je těleso, v němž nabývají hodnoty jednotlivé elementy matice.
5. Nechť T je těleso, $\text{char } T \neq 2$. Dokažte, že vektorový prostor čtvercových matic řádu n s hodnotami v T je direktním součtem podprostoru symetrických a podprostoru antisymetrických matic. Dokažte, že pro $T = \mathbb{Z}_2$ tomu tak není.
6. Určete hodnost matice v závislosti na $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Nechť A, B jsou dvě matice stejného typu. Dokažte, že platí $h(A+B) \leq h(A) + h(B)$ a najděte příklad na rovnost i ostrou nerovnost.

8. Řešte v závislosti na $a \in \mathbb{R}$ soustavu rovnic

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + ax_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1$$

Určete hodnotu matice soustavy a rozšířené matice soustavy rovnice v závislosti na a .

9. Řešte soustavu rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 9 & 2 & 20 \end{array} \right)$$

Určete hodnotu matice soustavy a rozšířené matice soustavy rovnice.

10. Najděte všechna řešení soustavy rovnic nad tělesem Z_5 :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Určete hodnotu matice soustavy a rozšířené matice soustavy rovnice.

11. Řešte v závislosti na $a \in \mathbb{R}$ soustavu rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & a \end{array} \right)$$

Určete hodnotu matice soustavy a rozšířené matice soustavy rovnice v závislosti na a .

12. Najděte polynom třetího stupně, jehož graf obsahuje body $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 5)$ a $(3, 37)$.

13. Řešte maticovou rovnici $XB = A$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

14. Najděte všechny matice X , které komutují ($AX = XA$) s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

15. Najděte inverzní matici k reálné matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Najděte inverzní matici k reálné matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

17. Dokažte z vět o řešitelnosti soustav rovnic, že matice $n \times n$ hodnosti n má inverzní matice M a N z pravé i levé strany ($MA = AN = E$) a že se tyto dvě matice rovnají.
18. Dokažte, že $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ a že $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.