Lineární algebra a geometrie pro matematiky - ZS 08/09

Příklady 5 - Báze vektorového prostoru

1. Rozhodněte, které podmnožiny $(\mathbb{Z}_3)^3$ jsou lineárně nezávislé. Ty, které jsou, doplňte na bázi $(\mathbb{Z}_3)^3$.
   (a) $\{(0,2,1)\}$
   (b) $\{(1,0,0),(0,0,0),(0,0,1)\}$
   (c) $\{(1,2,1),(2,1,2)\}$
   (d) $\{(1,0,1),(2,1,0),(0,0,1),(1,1,2)\}$
   (e) $\{(2,2,1),(1,2,2)\}$
   (f) $\{(2,2,0),(0,0,1),(1,1,2)\}$
2. Zjistěte, zda je množina vektorů $\{(1,-1,1,2), (1,8,7,-7)\ , (1,2,3,-1), (1,5,5,-4)\}$ v $\mathbb{R}^4$ lineárně nezávislá.
3. Zjistěte, zda je množina vektorů $\{(2,1,-1,2,-1), (-4,3,2,-1,1), (3,5,-2,1,-2), (2,2,-1,3,-1),\ (-1,2,3,1,3)\}$ v $\mathbb{R}^5$ lineárně nezávislá.
4. Zjistěte, zda je množina $\{(1{+}i, 1{-}i, 1{+}i),\ (1{-}i, 1{+}3i, i{-}1),(1, 1{+}i, i)\}$ v $\mathbb{C}^3$ lineárně nezávislá.
5. Zjistěte, zda je množina $\{(0,2,6,3,6), (2,3,4,5,4), (3,1,2,3,6), (6,5,1,3,5)\}$ v $(\mathbb{Z}_7)^5$ lineárně nezávislá.
6. Dokažte, že je-li $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru V nad T a $r_{ij} \in T, 1 \le i \le k, 1 \le j \le n$, pak vektory $s_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}) \in T^n$ tvoří lineárně nezávislou množinu $\{s_1, s_2, \dots s_k\}$ právě když je lineárně nezávislá množina $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, kde $v_i = \sum_1^n r_{ij} u_j \in V$.
7. Rozhodněte, zda je lineárně nezávislá množina $\{5x^2 + 2x - 1, x^2 + x, 2x^2 - x - 1\}$ funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.
8. Nechť $M \subset N$ jsou dvě podmnožiny vektorového prostoru V. Rozhodněte, které implikace platí:
   (a) M lineárně závislá $\Longrightarrow$ N lineárně závislá.
   (b) M lineárně nezávislá $\Longrightarrow$ N lineárně nezávislá.

(c) N lineárně závislá $\Longrightarrow$ M lineárně závislá.

(d) N lineárně nezávislá $\Longrightarrow$ M lineárně nezávislá.

9. Mějme množinu vektorů z aritmetického vektorového prostoru T^n, která je lineárně závislá. Dokažte, že pokud z této množiny vytvoříme množinu vektorů v T^m, m je mensi nez n, tak, že u všech vektorů původní množiny vynecháme posledních $n-m$ složek, pak je vzniklá množina lineárně závislá.
10. Vyberte všechny báze $\mathbb{R}^3$ z množiny $\{(1,2,3),(2,3,4),(3,2,3),(4,3,4),(1,1,1)\}$.
11. Doplňte množinu $\{(1,1,1,2),(0,2,1,0)\} \subset (\mathbb{Z}_3)^4$ na bázi vektorového prostoru $\langle\{(1,0,2,1),(2,0,1,0),(1,0,2,2),(2,1,0,1)\}\rangle$.
12. Najděte dimenzi prostoru $\langle\{(1,1,1,a),(1,1,a,1),(1,a,1,1),(a,1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.
13. Dokažte, že množina $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1+x_2=0 \wedge x_2-2x_4=0\}$ je podprostor $\mathbb{R}^4$ a určete jeho dimenzi.
14. Vyberte z množiny $\{(1,0,1),(3,2,1),(1,2,3),(1,0,-2)\}$ nějakou bázi $\mathbb{R}^3$ a vyjádřete zbylé vektory jako lineární kombinaci vektorů báze.
15. Z množiny vektorů $\{(5,7,-1,3),(1,-3,8,2),(9,17,-10,4),(-2,6,-16,-4)\} \in \mathbb{R}^4$ vyberte nějakou bázi jejího lineárního obalu.
16. Najděte bázi $\langle(0,1,-3,4),(2,2,2,2),(1,-1,3,7)\rangle \subset \mathbb{R}^4$, obsahující vektor $(1,4,-4,-1)$.
17. Nechť V je vektorový prostor dimenze n, $W \leq V$, $\dim W = n-1$, M je báze W, $\mathbf{u} \in V$. Dokažte, že $M \cup \{\mathbf{u}\}$ je báze V právě když $\mathbf{u} \notin W$.