Lineární algebra a geometrie pro matematiky - ZS 08/09

Příklady 3 - Tělesa

1. Vytvořte tabulku sčítání a násobení v tělese $\mathbb{Z}_5$
2. Spočítejte $(8^7 + 7^8)^{12}$ v $\mathbb{Z}_{19}$.
3. Spočítejte $\frac{(2^6-1)^7}{(-4)^3+2^{-7}}$ v $\mathbb{Z}_7$.
4. Rozhodněte, zda je tělesem množina všech sudých čísel.
5. Rozhodněte, zda je tělesem množina $\{a + \sqrt{2}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$.
6. Rozhodněte, zda je tělesem množina $\{a + \sqrt{3}b | a, b \in \mathbb{Q}\}$.
7. Rozhodněte, zda je tělesem množina všech polynomů v jedné proměnné vzhledem ke sčítání a násobení polynomů.
8. Rozhodněte, zda je tělesem sjednocení počátku komplexní roviny a jednotkové kružnice v ní vzhledem ke standardnímu násobení a sčítání na komplexních číslech.
9. Dokažte z axiomů, že pokud T je těleso a $a, b \in T$ jsou nenulové, pak $a.b \neq 0$.
10. Dokažte, že množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ je těleso.
11. Najděte všechna řešení homogenní soustavy rovnic nad tělesem Z_5 s maticí
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
12. Najděte všechna řešení homogenní soustavy rovnic nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ s maticí
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
v závislosti na parametru $a \in \mathbb{Z}_7$.
13. Najděte všechna řešení homogenní soustavy rovnic nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ s

maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Najděte průnik podprostoru $\langle(1,2,4),(3,0,1),(1,1,4)\rangle$ a podprostoru $\langle(0,2,1),(0,1,1),(1,1,3)\rangle$ v $\mathbb{Z}_5^3$.
15. Rozhodněte, zda je množina všech čtvercových matic typu 22 s operacemi sčítání a násobení matic okruhem, oborem integrity a tělesem.
16. Dokažte, že množina
$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \in \mathbb{Z}\right\}$$
s operací násobení matic je komutativní grupa.
17. Dokažte, že množina
$$\left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right\}$$
s operací násobení matic je nekomutativní grupa (pozn.: ve skutečnosti existuje už jen jedna nekomutativní grupa, která má méně prvků). Vytvořte tabulku grupové operace na této množině.