Lineární algebra a geometrie pro matematiky - ZS 08/09

Příklady 2 - Jádro zobrazení a Gaussova eliminace

1. Ukažte na příkladech, že množina řešení soustavy n rovnic se může, ale nemusí změnit, pokud
   (a) pro nějaké i vynásobíme i-tý řádek matice soustavy nulou.
   (b) přejdeme k matici, jejíž i-tý řádek je rozdílem i-tého a $(i-1)$-tého řádku původní matice pro všechna $i \in \{2, \dots, n\}$ a první řádek je rozdílem prvního a posledního řádku původní matice.
2. Vyjádřete elementární úpravu, která prohazuje i-tý a j-tý řádek jako posloupnost elementárních úprav násobení řádku nenulovým číslem a přičtení násobku řádku do jiného řádku. Najděte matici B takovou, že BA se od A liší právě záměnou i-tého a j-tého řádku.
3. Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} z - u + v &= 0 \\ -z + y + t &= 0 \\ -y + z - t + v &= 0 \\ y + t - u &= 0 \\ -x + z + v &= 0 \end{aligned}$$

5. Najděte všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 \\ 5 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Najděte všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Určete $\operatorname{Ker} f_A$ matice A v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Nechť A je matice typu mn, $b \in \mathbb{R}^m$ a $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ jsou dvě řešení nehomogenní soustavy rovnic $Ax = b$ (tedy vektory, které jsou vzorem b v zobrazení f_A). Ukažte, že $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} f_A$. Odvoďte z toho, že pro libovolné nalezené řešení x_P nehomogenní soustavy $Ax = b$ lze jakékoli řešení soustavy $Ax = b$ psát jako $x_P + x_H$, kde x_H je řešením homogenní soustavy $Ax = 0$.

9. Nechť $f_A, f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Rozhodněte, které z následujících vztahů platí:

   (a) $\operatorname{Ker} f_A = \operatorname{Ker} f_B \circ f_A$

   (b) $\operatorname{Ker} f_A \subset \operatorname{Ker} f_B \circ f_A$

   (c) $\operatorname{Ker} f_A \supset \operatorname{Ker} f_B \circ f_A$

   (d) $\operatorname{Ker} f_A \subset \operatorname{Ker} f_A \circ f_B$

   (e) $\operatorname{Ker} f_A \supset \operatorname{Ker} f_B \circ f_A$

   (f) $\operatorname{Ker} f_A \supset f_B(\operatorname{Ker} f_A)$

   (g) $\operatorname{Ker} f_A \subset f_B(\operatorname{Ker} f_A)$

   Zdůvodněte důkazem nebo protipříkladem.

10. Sestavte soustavu rovnic, jejíž množina řešení je $\langle (2,1,2,4), (1,-1,1,0) \rangle$.

11. Sestavte soustavu rovnic, jejíž množina řešení je

$$\langle (1,1,0,4,1,0,1), (1,-1,1,0,1,1,0), (2,1,1,0,0,1,1) \rangle$$

.

12. Najděte průnik podprostorů $\langle(2,1,2),(2,1,0),(0,1,0)\rangle$ a $\langle(1,1,0),(1,1,4)\rangle$
13. Najděte průnik podprostoru $\langle(1,2,1),(2,-1,0),(1,1,3)\rangle$ a podprostoru $\langle(1,0,1),(3,0,1),(-1,-1,-1)\rangle$