Lineární algebra a geometrie pro matematiky - ZS 08/09

Příklady 11 – Lineární formy

1. Rozhodněte, která z následujících zobrazení jsou lineární formy:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $f(a, b) = a + bi$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a, b) = 1 + 2a + 3b$
   (d) $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}^\infty$ je vektorový prostor všech nekonečných posloupností $f(\{a_i\}_0^\infty) = \lim_{i\to\infty} a_i$
   (e) $F_x : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, kde $C^\infty(M, \mathbb{R})$ je vektorový prostor všech reálných hladkých funkcí na množině M, $F_x(f) = f(x)$, kde $x \in M$.
   (f) $F : M^{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $F(A) = \det A$
2. Najděte dva různé izomorfizmy $V = \mathbb{R}^n$ a jeho duálního prostoru V^*. Popište kanonický izomorfizmus V a $(V^*)^*$.
3. Najděte duální bazi k bazi $\{(1, 2), (3, 4)\}$ prostoru $\mathbb{R}^2$.
4. Najděte bázi $\mathbb{R}^2$ tak, aby báze $f_1(u) = 7x_1 + x_2$, $f_2(u) = 9x_1 - 5x_2$ prostoru $(\mathbb{R}^2)^*$ byla k ní duální.
5. Nechť V je vektorový prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše n, $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Ověřte, že množina zobrazení $M = \{F_0, \dots, F_n\}$, kde $F_i : V \to \mathbb{R}$ je definováno $F_i(p) = p(c_i)$, tvoří bázi V^*. Ověřte, že množina $\{p_0, \dots p_n\}$ tzv. Lagrangeových polynomů

$$p_i(x) := \Pi_{j\neq i} \frac{(x - c_j)}{(c_i - c_j)}$$

   tvoří duální bázi k M.
6. Lineární forma má vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^3$ analytické vyjádření $f(u) = x_1 - 3x_2 + 4x_3$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi $N = \{(4, 1, 3), (3, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.
7. Lineární forma f na $\mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázi $\{(1, 1), (1, -1)\}$ analytické vyjádření $f(u) = x_1 + 2x_2$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem

k bázi $\{(1,-2),(3,2)\}$.

8. Lineární formy f_1, f_2, f_3 mají vzhledem k M analytické vyjádření $f_1(u) = x_1 + x_2 + x_3$,$f_2(u) = x_1 - x_3$,$f_3(u) = x_1 - 4x_2 - 3x_3$. Najděte bázi N, vůči níž mají tyto formy analytická vyjádření $f_1(u) = x'_1 + x'_2$, $f_2(u) = x'_2 + x'_3$, $f_3(u) = x'_1 + x'_3$.
9. Na prostoru všech polynomů stupně nejvýše n uvažujme homomorfizmus φ, $\varphi(p) = p'$ který polynomu přiřadí jeho derivaci, a lineární formu f, $f(p) = p(0)$. Popište obraz f v duálním endomorfismu φ^*, najděte nulovou množinu $\varphi^*(f)$, jádro φ^* a matici φ a φ^* vzhledem k bázi $\{1, x, \dots, x^n\}$, resp. jejímu duálu.
10. Endomorfizmus φ prostoru $\mathbb{R}^3$ je dán předpisem $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3)$. Určete matici duálního endomorfizmu φ^* vzhledem k bázi $f_1(u) = 8x_1 + 6x_2 - 5x_3$, $f_2(u) = 5x_1 + 4x_2 - 3x_3$, $f_3(u) = -x_1 - x_2 + x_3$.
11. Lineární formy f_1 a f_2 mají vzhledem ke kanonické bázi $\tilde{\mathbb{R}}^5$ souřadnice $\{(1,1,1,1,1)\}$ a $\{(1,-1,1,-1,1)\}$. Určete $\Psi(\{f_1, f_2\})$.
12. (2b) Buď N nějaká báze prostoru V_4. Najděte $\Phi(\{u_1, u_2\})$, kde $\{u_1\}_N = (1,2,-1,3)$ a $\{u_2\}_N = (2,-1,1,-2)$.