# Lineární algebra pro fyziky I

*Vzorová písemka, 8.1.2017*

1. Je množina reálných polynomů stupně menšího nebo rovného 7, které mají kořeny 2 a 3, vektorovým prostorem? Když ano, najděte nějakou bázi.
2. Uvažujte vektorový prostor $V = \mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$, tj. $\dim V = 2$. Nechť $f : V \to V$ je obecné lineární zobrazení. Jaká je nutná a postačující podmínka pro to, aby $f : V \to V$ bylo také lineární jako zobrazení mezi (1-rozměrnými) komplexními vektorovými prostory?
3. Dokažte, že pro $x \in \mathbb{R}^n$ je $x^T x \geq 0$, přičemž rovnost nastane pouze pro $x = 0$. Podobne dokažte, že pro reálnou matici $A$ platí $x^T A^T A x \geq 0$, pricemž rovnost nastane pouze pro $x \in N(A)$. Dokažte odtud, že platí $N(A) = N(A^T A)$ a $h(A) = h(A^T A)$.
4. Nechť $u \in \mathbb{R}^3$ je libovolný vektor. Uvažujte zobrazení $f_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ přiřazující vektoru $x \in \mathbb{R}^3$ jeho vektorový součin s $u \in \mathbb{R}^3$
   $$f_u(x) = x \times u.$$
   Je takové $f$ lineární? Když ano, najděte jeho matici, stopu a determinant.
5. Zformulujte větu o současné diagonalizaci množiny matic. Uvažujte dvě lineární zobrazení $f_u$ a $f_v$ z příkladu 4, $u \neq v$. Ukažte že zobrazení $f_u$ je diagonalizovatelné. Jsou $f_u$ a $f_v$ diagonalizovatelné současně?
6. Zformulujte Cayleyovu-Hamiltonovu větu. Dokažte ji pro matice $2 \times 2$.