Matematický proseminář

Sada 6 - komplexní čísla, ZS 2015/16

(1) Určete
  (a) $z = \frac{1+3i}{i-2}$ a k němu $\bar{z}, z^{-1}, |z|$
  (b) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})^{-1}$
  (c) $(1+i)^8$
  (d) $\sqrt{2-2i}$
  (e) $\arg\frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$
  (f) $\exp(-1+i\frac{\pi}{2})$
  (g) $\mathrm{Log}(ie^2)$
  (h) $\log(-3)$
  (i) i^i

(2) Určete, kolik různých uspořádaných dvojic reálných čísel (a, b) vyhovuje rovnici

$$(a+ib)^{2015} = a - ib$$

(3) V $\mathbb{C}$ řešte (ne)rovnice
  (a)
$$|z+3-i| < 2$$
  (b)
$$1 \le |z-1| \le 3$$
  (c)
$$z^2 + 8 + 6i = 0$$
  (d)
$$z^3 = 27i$$
  (e)
$$z^6 - 1 + i\sqrt{3} = 0$$
  (f)
$$\frac{|z-1|}{|z+1|} = 2$$
  (g)
$$|z+1| - |z-1| < 2$$
  (h)
$$|z^2 - 1| = 1$$
  (i)
$$\mathrm{Arg}\,\frac{z-1}{z+i} = \frac{\pi}{3}$$
  (j) Ukažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je
$$(1+i)^{4n} - (1-i)^{4n} = 0$$
  (k) Nechť α, β, γ jsou tři vzájemné různá komplexní čísla.
    (i) Dokažte, že leží v jedné přímce, právě když
$$\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha}) = 0$$
    (ii) Dokažte, že pokud $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$, pak
$$\arg\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}$$