

Matematický proseminář
Sada 4, ZS 2015/16

- (1) Určete
(a) $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$
(b) $\operatorname{tg} 105^\circ$
(c) $\sin 105^\circ - \sin 45^\circ$

- (2) Vypočtete

$$\sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} - \operatorname{cotg} \frac{11\pi}{6}$$

- (3) Dokažte vzorec

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha},$$

uveďte podmínky platnosti a odvoďte vzorec pro $\operatorname{tg} 2\alpha$.

- (4) Odvoďte vyjádření

- (a) $\cos 4\alpha$ pomocí $\cos \alpha$
(b) $\sin 3\alpha$ pomocí $\sin \alpha$

- (5) Pokud $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = a$, čemu se rovná

- (a) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \alpha$
(b) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{cotg}^3 \alpha$

- (6) Pokud $\operatorname{tg} \alpha = -7$ a $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, čemu se rovná

$$\frac{3 \sin \alpha + 8 \cos \alpha}{5 \operatorname{tg} \alpha - 24 \operatorname{cotg} \alpha}$$

- (7) Upravte na součin

- (a) $1 + \cos \alpha$
(b) $1 + \sin \alpha$
(c) $1 + \cos \alpha + \sin \alpha$

- (8) Upravte na součet

- (a) $\sin 5x \cos x$
(b) $\cos \frac{5}{6}x \cos \frac{2}{3}x$

- (9) Zjednodušte výraz

- (a)

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} : \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x + \sin x}$$

- (b)

$$\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$$

- (10) Dokažte, že

$$\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

- (11) Dokažte, že pro α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníka platí

- (a) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$
(b) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$
(c) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$

- (12) Spočtete

- (a) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$
(b) $\operatorname{cotg}(\operatorname{arcsin} 2)$
(c) $\cos(\operatorname{arcsin} \frac{1}{3})$

- (13) Dokažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

- (a)

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

(b)

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(14) Řešte rovnice

(a) $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

(b) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$

(c) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin 2x$

(15) Pro pravidelný pětiúhelník vepsaný do kružnice o poloměru R určete jeho obsah, délku strany a délku úhlopříčky.(16) Pro pravidelný n -úhelník vepsaný do kružnice o poloměru R určete jeho obsah, přičemž $n \in \{3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$.

(17) Dokažte Pythagorovu větu sférické geometrie:

$$\cos c = \cos a \cos b,$$

kde a, b, c jsou délky oblouků hlavních kružnic na sféře o poloměru 1, které tvoří pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách a, b a přeponě c .

(18) Určete periodu funkce

(a) $\sin^4 x + \cos^4 x$

(b) $8 \sin \frac{5}{2}x + 3 \cos \frac{2}{5}x$