Matematický proseminář

Sada 3, ZS 2015/16

(1) Určete polynom stupně nejvýše 2, jehož graf prochází body $[0,1]$, $[1,0]$, $[2,1]$ v rovině. Rozmyslete nebo dohledejte si, jaké má tato úloha obecné řešení (Lagrangeův interpolační polynom)

(2) Určete všechny polynomy stupně nejvýše 2, jejichž graf prochází body $[-1,1]$, $[1,3]$. Rozmyslete si, jak by vypadalo řešení, kdybychom požadovali polynomy stupně nejvýše 3, 4, případně bez omezení stupně.

(3) Najděte reálné číslo a tak, aby $\pm a$ byly kořeny polynomu $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$ a určete pak zbylé kořeny.

(4) Určete $a \in \mathbb{R}$, aby vzdálenost kořenů polynomu $4x^2 + ax - 3$ byla 2.

(5) Určete $b \in \mathbb{R}$ tak, aby $x + 2$ bylo faktorem polynomu $x^3 - 2x^2 + kx - 10$.

(6) Určete
   (a) koeficient u členu x^6 v polynomu $(2 + x)(1 + x)^8$
   (b) koeficient u členu x^4 v polynomu $(1 - x + x^2)(2 + x)^6$
   (c) koeficient u členu x^{-1} ve výrazu $\left(x^2 + \frac{4}{x}\right)^{10}$

(7) Určete kořeny polynomů
   (a) $x^3 + 11x^2 + 31x + 21$
   (b) $x^3 - 3x - 2$

(8) Rozložte polynomy na ireducibilní činitele:
   (a) $x^4 - 2x^2 + 1$
   (b) $8x^3 + 1$
   (c) $3x^2 + x - 2$
   (d) $64 - x^6$
   (e) $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 6$
   (f) $6x^6 - 5x^3 - 4$
   (g) $x^4 + x^3 - x - 1$

(9) Pomocí dělení polynomů a rozkladu na parciální zlomky zjednodušte výrazy
   (a) $\frac{3x^3+4x+11}{x^2-3x+2}$
   (b) $\frac{4x^3-2x^2-3}{2x^2-1}$
   (c) $\frac{12x^3-11x^2+9x+18}{4x+3}$

(10) Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která
   (a) $\frac{1}{\sin^2 x} + \operatorname{cotg} x - 1 = 0$
   (b) $\log_x(x + 4) = 1$
   (c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-3x+1} = 8$