Matematický proseminář

Sada 2, ZS 2015/16

(1) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ existují čísla $d_1, \ldots, d_r$, $d_i \in \{0, \ldots, i\}$, pro která
$$n = d_1 1! + d_2 2! + \ldots d_r r!$$
(2) Definujme rekurentní posloupnost předpisem $T_1 = T_2 = T_3 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} : T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$. Dokažte, že pak $\forall n \in \mathbb{N} : T_n < 2^n$.

(3) Dokažte, že každá n-prvková množina má 2^n podmnožin, 2^{n-1} podmnožin o sudém počtu prvků a 2^{n-1} podmnožin o lichém počtu prvků.

(4) Určete, kolik souvislých oblastí v rovině vytýčí n přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě.

(5) Dokažte, že každý n-úhelník má součet vnitřních úhlů $\pi(n-2)$.

(6) Mějme rekurentní posloupnost zadanou předpisem $a_1 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$. Odvoďte a dokažte formuli pro $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$.

(7) Nechť A, B, C jsou množiny, $f : A \to B$ a $g : B \to C$ jsou zobrazení, $h = g \circ f : A \to C$ jejich složení. Dokažte nebo vyvraťte (najděte protipříklad), že

- (a) Pokud f a g jsou prostá, pak je h prosté.
- (b) Pokud f a g jsou na, pak je h na.
- (c) Pokud h je prosté, pak je f prosté.
- (d) Pokud h je prosté, pak je g prosté.
- (e) Pokud h je na, pak je f na.
- (f) Pokud h je na, pak je g na.

(8) Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Dokažte nebo vyvraťte

- (a) Jsou-li f a g omezené, pak $f + g$ je omezená.
- (b) Jsou-li f a g omezené, pak fg je omezená.
- (c) Je-li $f + g$ omezená, pak jsou omezené i f a g.
- (d) Je-li fg omezená, pak jsou omezené i f a g.

(9) Nechť $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. Dokažte nebo vyvraťte

- (a) Je-li f klesající, pak je na.
- (b) Je-li f klesající, pak je prostá.
- (c) Je-li f na, pak není omezená.
- (d) Není-li f omezená, pak je na.