Matematický proseminář

Sada 1, ZS 2015/16

(1) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$1.2 + 2.3 + \ldots + n.(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(2) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ platí

$$\sum_{i=0}^{n} i!i = (n+1)! - 1$$

(3) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $10^n - 4$ dělitelé šesti.

(4) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$. Formulujte obdobné tvrzení týkající se nerovnosti $2^n > n^2$ a dokažte jej.

(5) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \in (0,1)$ platí

$$(1-x)^n \geq 1 - nx$$

(6) Dokažte (s pomocí vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$), že pro libovolná reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí

$$\left| \sin \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\sin x_i|$$

(7) Nechť A je množina a $A_1, \ldots, A_n$ její libovolné podmnožiny. Pak platí

$$(A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c,$$

kde A_i^c značí doplněk množiny A_i v množině A. Dokažte toto tvrzení.

(8) Označme F_n n-tý člen Fibonacciho posloupnosti, tedy celočíselné rekurentní posloupnosti $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ zadané předpisem $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a $\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

.

(9) Dokažte, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ je F_{3m} sudé a F_{3m-1} i F_{3m-2} jsou lichá.

(10) Určete, která přirozená čísla je možné zapsat ve tvaru $n = 3x + 7y$, kde $x, y \in \mathbb{N}$. (Návod: Zkontrolujte prvních několik přirozených čísel ručně a pak indukcí dokažte, že ostatní už je možné takto zapsat všechna).

(11) Najděte chybu v důkazu následujícího tvrzení:

Tvrzení: Všechna reálná čísla se navzájem rovnají.

Důkaz: Zapišme tvrzení nejprve formálně jako výrok:

$V(n) =$ "Pro libovolná reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí $x_1 = \ldots = x_n$."

Pro $n = 1$ výrok $V(1)$ triviálně platí. Pokud $n \in \mathbb{N}$, předpokládejme, že $V(n)$ platí a že $x_1, \ldots, x_{n+1}$ jsou libovolná reálná čísla. Podle indukčního přepokladu se libovolná n-tice reálných čísel navzájem rovná, platí tedy

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n,$$

ale také

$$x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}.$$

Pak ale $x_1 = \ldots = x_{n+1}$, tedy výrok $V(n+1)$ platí. Všechna reálná čísla jsou si tedy rovna.