Lineární algebra pro fyziky - LS 09/10

Příklady - všeobecná sbírka 2

1. Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $u = (1,2)$, $v = (1,-1)$, $T : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované
$$T(\phi, \psi) = \phi(u)\psi(v) - 2\phi(v)\psi(u)$$
Ověřte, že se jedná o tenzor, najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $\{(-2,1),(1,1)\}$ a ověřte rovnost pomocí transformačního vztahu.
2. Uvažujme $V = \mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, $w = (3,1)$, $T : V^* \times V \times V \to \mathbb{R}$ je tenzor definovaný
$$T(\phi, u, v) = \phi(w)(u, v)$$
Najděte jeho souřadnice vzhledem k bázi $\{(1,0),(1,1)\}$ a vyjádřete je jako dvojici matic (T^i_{j1}, T^i_{j2}).
3. Nechť $a = (a^1, a^2) \in \mathbb{R}^2$ a T je tenzor typu $(1,2)$ na $\mathbb{R}^2$ definovaný pro $\phi, \psi \in (\mathbb{R}^2)^*, u \in \mathbb{R}^2$ vztahem
$$T(\phi, \psi, u) = \phi(a)\psi(u) - \psi(a)\phi(u)$$
   (a) Ukažte, že T je antisymetrický v prvních dvou argumentech.
   (b) Najděte souřadnice T vůči kanonické bázi a zapište je jako dvojici matic (T^{1i}_j, T^{2i}_j).
   (c) Napište transformační vztah pro změnu souřadnic tenzoru T při přechodu do nějaké báze M.
   (d) Pomocí tohoto transformačního vztahu najděte souřadnice (T'^{1i}_j, T'^{2i}_j) tenzoru T vůči bázi $\{(2,1),(3,1)\}$.
4. Najděte ortogonální matici Q a diagonální matici B takovou, že $Q^{-1}BQ$ je
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$
5. Převeďte následující kvadratickou formu v $\mathbb{R}^3$ na kanonický tvar a uveďte příslušnou transformaci souřadnic:
$$17x^2 + 14y^2 + 14z^2 - 4xy - 4xz - 8yz$$

6. Převeďte následující kvadratickou formu $\mathbb{R}^4$ na kanonický tvar a uveďte příslušnou transformaci souřadnic:

$$9x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 8t^2 + 8yz - 4yt + 4zt$$

7. Dokažte, že pokud A je matice bilineární formy f na $\mathbb{R}^n$ a B je matice skalárního součinu g tamtéž, pak řešení úlohy $\det(A - \lambda B) = 0$ vede nakonec k nalezení polární báze f, která je ortonormální vzhledem ke g.