Lineární algebra pro fyziky - LS 09/10

Příklady - všeobecná sbírka

1. **2** Dokažte, že $Tr(A^m) = \sum \lambda_i^m$, kde λ_i jsou vlastní čísla A.
2. **1** Označme koeficienty charakteristického polynomu vyjádřením $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + D_1\lambda^{n-1} + \ldots + D_n$. S pomocí předchozího tvrzení a Vietových vztahu pro D_i dokažte rekurentní formuli

$$mD_m + D_{m-1}Tr(A) + D_{m-2}Tr(A^2) + \ldots + Tr(A^m) = 0, 1 \leq m \leq n$$

   Využijte toho k napsání charakteristického polynomu ve stupni 3 a 4 pouze pomocí stop mocnin A.
3. **2** Dokažte, že $p(\sigma(A)) = \sigma(p(A))$, tedy nejprve, že pro každé vlastní číslo λ matice A je $p(\lambda)$ vlastním číslem matice $p(A)$, a poté naopak. Předpokládejte, že všechny polynomy jsou úplně rozložitelné (tedy např. nad tělesem komplexních čísel). Z tohoto tvrzení dokažte, že pokud $p(x)$ je polynom, pak $p(A)^{-1}$ existuje právě když žádné vlastní číslo matice A není kořenem polynomu $p(x)$.
4. **3** V prostoru reálných polynomů stupně nejvýše 2 najděte bázi, v níž je matice zobrazení T, které reálnému polynomu $f(x)$ přiřazuje polynom $(Tf)(x) = f(0) + f(1)(x + x^2)$, diagonální.
5. **3** Spočítejte matici

$$\sin\begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$$

   .
6. **3** Určete limitu

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{4^m} \begin{pmatrix} 7 & -9 & -15 \\ 3 & 7 & 3 \\ 3 & -9 & -11 \end{pmatrix}^m$$

7. **2** Každý rok se 1/10 z celkových K obyvatel Kocourkova odstěhuje do Tramtárie a 1/5 z celkových T obyvatel Tramtárie se zase odstěhuje do Kocourkova. Kdo se neodstěhuje, zůstává na místě. Určete matici zobrazení, které přiřazuje vektoru (K, T) vektor počtu obyvatel příští rok a poté určete, kolik obyvatel bude kde bydlet až naprší a uschne (tj. za 42 let).

8. **2** Označme $O(n) := \{A \in M(n \times n) | A^T A = E\}$ a $SO(n) := O(n) \cap \{A | \det A = 1\}$. Ukažte, že pro libovolná matice $A \in SO(3)$ zachovává nějaký vektor $v \in \mathbb{R}^3$ a v rovině na něj kolmé působí jako rotace o úhel $\frac{1}{2}(\operatorname{Tr} A - 1)$.

9. **1** Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}^n$ je posloupnost vektorů, definujme operátor první diference takto: $(\Delta f)_j(i) := f_j(i+1) - f_j(i)$ a násobení maticí A klasicky takto: $(Af)_j(i) = \sum a_{jk} f_k(i)$. Ukažte, že soustava diferenčních rovnic prvního řádu $\Delta f = Af$ má řešení $f(i) = (A + E)^i f(0)$. Ukažte, že rekurentní relaci tvaru $g(i + m) + \sum_{k=0}^{m-1} b_k g(i + k) = 0$, kde $g : N \to C$ lze převést na soustavu m diferenčních rovnic prvního řádu.

10. **2** Na kružnici se pohybují bez tření dvě tělesa, první má hmotnost m a velikost rychlosti u_0, druhé má hmotnost M a velikost rychlosti v_0. Rychlosti nejsou stejné a zároveň stejně orientované, tedy časem dojde ke srážce. Považujme všechny srážky za dokonale pružné a označme u_i, v_i velikosti rychlosti obou těles po i-té srážce. Sestavte soustavu diferenčních rovnic, jíž se tato posloupnost dvojic velikostí rychlostí řídí a vyřešte ji.

11. **3** Najděte Jordanův tvar matice $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

12. **3** Najděte Jordanův tvar matice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

13. **3** Určete pro libovolné celé n matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^n$

14. **3** Určete $\exp \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

15. **3** Určete $\exp \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

16. **3** Spočítejte $\sin \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$

17. **3** Zjistěte, zda jsou podobné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a pokud ano, najděte matici C splňující $CAC^{-1} = B$.

18. **3** Zjistěte, zda jsou podobné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a pokud ano, najděte matici C splňující $CAC^{-1} = B$.

19. **2** Vypočtěte pomocí Hamilton-Cayleovy věty (bez určení vlastních čísel)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{25}$$

20. **3** Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_3 \\ x_2' &= x_2 + x_3 \\ x_3' &= 2x_3 \end{aligned}$$

s obecnou poč. podmínkou.

21. **1** A je komplexní matice $n \times n$ a $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ je n vektorů v C^n závislých na $t \in R$, které řeší soustavu rovnic $x'(t) = Ax(t)$. Zjistěte, jakou diferenciální rovnici splňuje funkce $W(t) = \det(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ a dokažte pomocí toho, že vektory jsou lineárně nezávislé pro všechna t, právě když jsou lineárně nezávislé pro nějaké t.

22. **2** Spočítejte pravděpodobnost vítězství ve hře hrané na hracím plánu se čtyřmi políčky 1,2,3,4. Na začátku je figurka na poli 2, dosáhnout pole 4 je prohra, dosáhnout pole 1 je vítězství. V každém tahu si hodíme kostkou a na 1,2 posuneme figurku o jedno pole doleva, na 3,4,5,6 o jedno pole doprava. Použijte při tom vlastní čísla a limitní přechod, případný alternativní výpočet jen jako kontrolu.

23. **3** Dokažte, že pro hermitovskou matici H je matice $\exp(iH)$ unitární. Použijte definici exponenciály.

24. **1** Dokažte, že pro libovolnou čtvercovou matici A platí, že A je podobná A^T.

25. **2** Zjistěte, které z matic $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ a $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ jsou podobné.

26. **2** Řešte soustavu diferenciálních rovnic $\dot{y} = Ay + f$, kde A je definováno v předchozím příkladě a $f(t) = (e^{2t}, t\sin t, \cos t)^T$.

27. **2** Řešte soustavu diferenciálních rovnic $\dot{y} = Cy + f$, kde C je definováno v předpředchozím příkladě a $f(t) = (e^{2t}, t\sin t, \cos t)^T$.

28. **3** Určete Jordanovy tvary matic $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & \dots & n-1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

29. **2** Spočítejte $\ln \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, a to jak pomocí přechodu k Jordanově bázi, tak interpolačním polynomem.