Lineární algebra pro fyziky - LS 09/10

Příklady 8 - Kvadratické formy

1. Určete, pro která λ je kvadratická forma
$$f_2(u) = x_1^2 - 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$$
pozitivně definitní.
2. Na $\mathbb{R}^3$ pomocí Sylvestrova kritéria určete signaturu kvadratické formy
$$f_2(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$
3. Určete signaturu kvadratické formy na $\mathbb{R}^4$:
$$f_2(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2$$
4. Nechť ϕ je netriviální lineární forma na $\mathbb{R}^n$. Určete signaturu kvadratické formy dané vztahem $f_2(u) = \phi(u)^2$.
5. Popište všechny vektory v nulové množině kvadratické formy na $\mathbb{R}^2$ dané vztahem
$$f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2$$
6. Popište všechny vektory v nulové množině kvadratické formy na $\mathbb{R}^4$ s maticí vzhledem ke kanonické bázi
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
7. Nechť $f : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ je zobrazení dané vztahem
$$f(x, y) = (3 + i)x_1\bar{y}_1 - (1 - i)x_1\bar{y}_2 + 2x_2\bar{y}_1 - ix_2\bar{y}_2$$
Ověřte, že se jedná o seskvilineární formu, najděte její matici vzhledem ke kanonickým bázím a rozložte ji na součet hermitovské a antihermitovské formy.
8. Přizpůsobte metodu řádkových a sloupcových úprav pro hermitovské formy a najděte pomocí ní polární bázi kvadratické formy na $\mathbb{C}^2$
$$f_2(x) = -2\,\mathrm{Im}\, x_1\bar{x}_2 - 3|x_2|^2 \equiv i\bar{x}_2x_1 - ix_2\bar{x}_1 - 3|x_2|^2$$
9. Určete nulovou množinu kvadratické formy z předchozí úlohy.