Lineární algebra pro fyziky - LS 09/10

Příklady 7 - Bilineární formy

1. Nechť f je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$ definovaná vztahem $f(x, y) := x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1$. Určete matici formy vzhledem ke kanonické bázi a zapište levou a pravou lineární formu formy f danou vektorem $(1, 2)$ vzhledem k bázi $\{(1, 1), (0, 1)\}$.
2. Nechť f je bilineární forma na $\mathbb{R}^3$ daná vztahem $f(x, y) = x_1y_1 + x_3y_1$. Určete levý a pravý vrchol formy f.
3. Najděte bilineární formu na $\mathbb{R}^3$, která není symetrická ani antisymetrická, její levý vrchol je netriviální a je identický s vrcholem pravým. Ukažte, že na $\mathbb{R}^2$ žádná taková bilineární forma neexistuje.
4. Nechť f je bilineární forma na $P^1(\mathbb{R})$ daná vztahem $f(p, q) = p(1)q(-1)$. Určete její levý a pravý vrchol.
5. Nechť f je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$ definovaná vztahem $f(x, y) := x_1y_1 + 3x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$. Určete matici f vzhledem k bázi $\{(1, 1), (1, 2)\}$.
6. Nechť f je bilineární forma na $P^2(\mathbb{R})$ definovaná vztahem $f(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Najděte její matici vzhledem k bázi $\{1, x, x^2\}$.
7. Nechť f je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$, jejíž matice vhledem k bázi $\{(1, 2), (1, 3)\}$ je
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Určete matici f vzhledem k bázi $\{(1, 0), (1, 1)\}$.
8. Určete matici bilineární formy $f(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ na prostoru $M_2(\mathbb{R})$ vzhledem k bázi
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
9. Nechť $u \in \mathbb{R}^3$, definujme f bilineární formu na $\mathbb{R}^3$ vztahem $f(x, y) = u \cdot (x \times y)$, kde $\cdot$ znamená skalární a $\times$ vektorový součin. Najděte matici f vzhledem ke kanonické bázi a určete vrchol f.
10. Nechť f je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$ definovaná vztahem $f(x, y) := x_1y_1 + 3x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$. Rozložte ji na součet symetrické a antisymetrické bilineární formy.

11. Určete dimenzi prostoru všech antisymetrických bilineárních forem na $\mathbb{R}^3$.
12. Najděte polární bázi symetrické bilineární formy f na $\mathbb{R}^2$ dané vztahem $f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.
13. Najděte polární bázi symetrické bilineární formy f na $\mathbb{R}^3$, jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Nechť f je bilineární forma na $P^1(\mathbb{R})$ definovaná vztahem $f(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Určete její polární bázi.