Řešení 7

Ad 1. Matice f vzhledem ke kanonické bázi je $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $f_l(v) = f((1,2), v) = v_2 - v_1 = \alpha_2$, $f_r(v) = f(v, (1,2)) = 3v_1 - v_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2$. ($\alpha_1$,$\alpha_2$ jsou souřadnice vektoru $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ vzhledem k bázi $\{(1,1),(0,1)\}$)

Ad 2. $V_l =< (0,1,0),(1,0,-1) >$, $V_r =< (0,1,0),(0,0,1) >$.

Ad 3. Nechť je bilineární forma f zadaná předpisem

$$f(x,y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2 =$$

$$= y_1(ax_1 + cx_2) + y_2(bx_1 + dx_2) =$$

$$= x_1(ay_1 + by_2) + x_2(cy_1 + dy_2)$$

dále ať vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ patří do pravého i levého vrcholu formy, to znamená, že řeší následující soustavy:

$$\begin{array}{ll} av_1 + cv_2 = 0 & av_1 + bv_2 = 0 \\ bv_1 + dv_2 = 0 & cv_1 + dv_2 = 0 \end{array}$$

z toho ale vyplývá, že $b = c$ a forma f je tedy symetrická.

Ad 4. $V_l =< x - 1 >$, $V_r =< x + 1 >$.

Ad 5. Původní matice je $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Matice přechodu je $P = P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, tedy matice této bilineární formy vzhledem k $\{(1,2),(1,3)\}$ je

$$B' = P^T BP = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ad 6. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, forma je symetrická (komutativita násobení).

Ad 7. $B' = P^T BP = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$, kde $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ad 8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, forma je opět symetrická (cykličnost stopy).

Ad 9. Pro $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ je matice f vůči kanonické bázi $\begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{pmatrix}$, z vlastností vektorového součinu vyplývá, že je tato matice antisymetrická, tedy pravý i levý vrchol jsou totožné.

$$V_l = V_r =< u >$$

Zdůvodnění: Každý vektor z tohoto vrcholu bude mít vektorový součin kolmý na u, tedy následný skalární součin s u bude nulový. Pro každý jiný vektor z $\mathbb{R}^3$ naleznu vektor z $< u >^\perp$ tak, aby vektorový součin nebyl kolmý na u.

Ad 10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (matice odpovídajících forem)

Ad 11. Tato dimenze je rovna dimenzi prostoru antisymetrických matic stupně 3 (neboť forma jde zapsat jako matice), přičemž tento prostor je generován prvky $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, tedy jeho dimenze je 3.

Ad 12. Označme matici této formy vzhledem ke kanonické bázi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hledáme diagonální matici B' ve tvaru $B' = E^T BT$, kde E je (regulární) matice přechodu (k polární bázi). Řadou symetrických úprav se dostáváme k

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tedy polární báze této symetrické formy je $\{(1,0), (-1,1)\}$.

Ad 13. Podobně jako u 12. se několika symetrickými úpravami dostaneme k

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a tak polární bázi máme např. $\left\{(1,1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (-2,0,1)\right\}$.

Ad 14. Matice této formy vůči bázi $\{1, x\}$ je $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Stejným postupem jako výše dojdeme k polární bázi $\left\{1, x - \frac{1}{2}\right\}$