Lineární algebra pro fyziky - LS 09/10

Příklady 6 - Duální homomorfizmus

1. Nechť $W = \langle (1,1,2,1),(3,1,2,1) \rangle \leq \mathbb{R}^4$. Popište všechny lineární formy, které vymizí na celém W.
2. Nechť $W' = \langle x_1+x_3+x_4, x_1-x_2+x_5, x_2+x_3+x_4-x_5 \rangle \leq (\mathbb{R}^5)^*$. Popište všechny vektory z $\mathbb{R}^5$, které patří do nulové množiny všech prvků W'.
3. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, $M = \{u_1, \ldots, u_k\}$ množina vektorů v něm, pro každý z těchto vektorů definujme $f_i \in V^*$ předpisem $f_i(v) = (u_i, v)$. Dokažte, že $\bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker} f_i \oplus \langle M \rangle = V$.
4. Nechť f, g jsou dvě lineární formy na reálném vektorovém prostoru V. Dokažte, že $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, právě když existuje $0 \neq r \in \mathbb{R}$ takové, že $f = rg$.
5. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze, W jeho podprostor, $g \in W^*$. Dokažte, že existuje $f \in V^*$ taková, že $\forall u \in W$, $f(u) = g(u)$.
6. Nechť $V = P^n(\mathbb{R})$ je prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše n, $a, b \in \mathbb{R}$, definujme lineární formu $f \in V^*$ vztahem

   $$f(p) = \int_a^b p(x)dx$$

   a endomorfizmus $D : V \to V$ vztahem $D(p(x)) = p'(x)$. Čemu se rovná $D^*(f)$? Určete $\operatorname{Ker} D^*$.
7. Nechť B je pevná matice $n \times n$, definujme endomorfizmus prostoru všech matic $n \times n$ vztahem $F(A) := AB - BA$. Nechť f je lineární forma na tomto prostoru daná vztahem $f(A) := \operatorname{Tr}(A)$. Dokažte, že $f \in \operatorname{Ker} F^*$.
8. Nechť $M = \{(1,1),(2,3)\}$, $N = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je homomorfizmus, jehož matice vzhledem k bázím M a N je

   $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Určete matici ϕ^* vzhledem ke kanonickým bázím.

9. Nechť $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je endomorfismus definovaný vztahy $\phi((3,2)) = (1,1)$, $\phi((4,3)) = (1,-1)$. Určete matici duálního endomorfizmu vzhledem ke kanonické bázi a bázi $\{(2x_1 - x_2, 3x_1 - x_2\}$.

10. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Definujme $\forall u \in V$ lineární formu $f_u \in V^*$ předpisem $f_u(v) := (u,v)$. Tím je definováno zobrazení $F : V \to V^*$, $F(u) = f_u$. Dokažte, že F je izomorfizmus.

11. Nechť V, W jsou vektorové prostory konečné dimenze. Dokažte, že zobrazení $F : \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$, které homomorfizmu ϕ přiřazuje jeho duální homomorfizmus $F(\phi) := \phi^*$, je izomorfizmus vektorových prostorů $\mathrm{Hom}(V,W)$ a $\mathrm{Hom}(W^*, V^*)$.