Řešení 6

Ad 1. (řešení hom. soustavy) $< x_3 - 2x_2, x_4 - x_2 >$

Ad 2. (řešení hom. soustavy) $< (-1,-1,1,0,0), (-1,-1,0,1,0), (0,1,0,0,1) >$

Ad 3. Vektor se nachází v průniku jader, právě když je kolmý na všechny vektory z M, tedy $\bigcap_{i=1}^{k} Ker\, f_i =< M >^{\perp}$ a jak známo podprostor a jeho ortogonální doplněk tvoří direktním součtem celý prostor.

Ad 4. Nechť $Ker\, f = Ker\, g$. Z věty o dimenzi jádra a obrazu vyplývá, že tento prostor je dimenze $dim\, V - 1$, a tedy že ve V existuje podprostor W generovaný jedním (nenulovým) vektorem, pro který platí $Ker\, f \oplus W = Ker\, g \oplus W = V$ a pro $\forall w \in W$ mimo nulový vektor je $f(w) \neq 0$, $g(w) \neq 0$. Označíme-li w_1 generátor W, pak pro $w \in W$, $w \neq 0$ platí

$$w = \alpha w_1, \ \frac{f(w)}{g(w)} = \frac{f(\alpha w_1)}{g(\alpha w_1)} = \frac{\alpha f(w_1)}{\alpha g(w_1)} = \frac{f(w_1)}{g(w_1)} = r \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}, 0 \neq r \in \mathbb{R})$$

tedy $\forall v \in V$ (na W dokázáno výše, jinde triviální rovnost) platí $f(v) = rg(v)$.

Opačná implikace je jednoduchá, ze vzorce $f = rg$, kde r není nula vyplývá: $g = 0 \Rightarrow f = 0 \wedge f = 0 \Rightarrow g = 0$, tedy jádra zobrazení jsou navzájem podmnožinami, tudíž jsou totožné.

Ad 5. Lineární zobrazení g je jednoznačně zadané hodnotami na bázi W^*. Pokud ji rozšíříme na bázi celého V a zanecháme původní hodnoty na prvcích báze W^* (jinde je možné zvolit cokoli), získáme lineární formu $f \in V^*$, která splňuje zadaný předpoklad.

Ad 6. Z definice $D^*(f)(p) = f(D(p)) = \int_a^b p'(x)dx$. Pokud vyjádříme D např. v bázi $B = \left\{1, x, \frac{x^2}{2}, \dots, \frac{x^n}{n!}\right\}$

$$D_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

pak matice D^* je

$$D^*_{B^*B^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a vidíme, že $Ker\, D^*$ je generováno lineárním funkcionálem závisejícím pouze na koeficientu u x^n v polynomu p, tedy například $Ker\, D^* =< p^{(n)}(0) >$

Ad 7. $f \in Ker\, F^* \Leftrightarrow \forall v \in V\ :\ F^*(f)(v) = f(F(v)) = 0$. Tedy zkoumáme, zda $\forall A \in M_{nn}$, (B dané) platí $Tr(AB - BA) = 0$, což je však jasné, neboť $Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = Tr(AB) - Tr(AB) = 0$ (linearita sčítání matic a cykličnost stopy).

Ad 8. Vůči kanonickým bázím má zobrazení ϕ matici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -10 & 8 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$$

tedy ϕ^* má vůči odpovídajícím duálním bázím matici

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -10 \\ -4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Ad 9. Matice ϕ vůči kanonické bázi je $\phi_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, tedy $\phi^*_{E^*E^*} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$. Označme $B^* = \{2x_1 - x_2, 3x_1 - x_2\}$, matice přechodu od E^* k B^* je $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, přičemž $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Přislušnou transformací dostaneme

$$\phi^*_{B^*B^*} = P^{-1}\phi^*_{E^*E^*}P = \begin{pmatrix} -12 & -10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Ad 10. Že je toto zobrazení lineární, vyplývá z odpovídajících vlastností skalárního součinu. Protože prostory V a V^* mají stejnou dimenzi, stačí (z věty o dimenzi jádra a obrazu) zjistit, zda je zobrazení F prosté, neboli zda je jeho jádro triviální. Nechť tedy máme $u \in V$ takové, že platí

$$\forall v \in V\ :\ F(u)(v) = (u, v) = 0$$

Z definice skalárního součinu vyplývá, že $u = 0$, neboť v opačném případě bychom mohli zvolením $v = u$ zajistit nenulovost (u, v), což by byl spor.

Ad 11. Pro $\varphi \in W^*$, $v \in V$, $k \in \mathbb{F}$ platí $F(\phi_1 + \phi_2)(\varphi)(v) = (\phi_1 + \phi_2)^*(\varphi)(v) = \varphi(\phi_1(v) + \phi_2(v)) = \varphi(\phi_1(v)) + \varphi(\phi_2(v)) = F(\phi_1)(\varphi)(v) + F(\phi_2)(\varphi)(v)$ i zároveň $F(k\phi_1)(\varphi)(v) = (k\phi_1)^*(\varphi)(v) = \varphi(k\phi_1(v)) = k\varphi(\phi_1(v)) = kF(\phi_1)(\varphi)(v)$. Tedy zobrazení F je lineární. Jeho zdrojový i cílový prostor mají očividně stejnou dimenzi, opět tedy stačí vyšetřovat, zdali je $Ker\, F$ triviální. Nechť tedy je $\phi \in Hom(V, W)$ takové, že

$$\forall \varphi \in W^*, \forall v \in V\ :\ F(\phi)(\varphi)(v) = \phi^*(\varphi)(v) = \varphi(\phi(v)) = 0$$

Pokud je ϕ netriviální, existuje nějaký vektor $v \in V$ takový, že $\phi(v) \neq 0$, což znamená, že existuje i lineární forma, která je na $\phi(v)$ nenulová (stačí zvolit nějakou s nenulovými konstantami na celé bázi W), což je opět spor.