Lineární algebra pro fyziky - LS 09/10

Příklady 5 - Lineární formy 1

1. Rozhodněte, která z následujících zobrazení jsou lineární formy:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $f(a, b) = a + bi$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a, b) = 1 + 2a + 3b$
   (d) $F_x : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, kde $C^\infty(M, \mathbb{R})$ je vektorový prostor všech reálných hladkých funkcí na množině M, $F_x(f) = f(x)$, kde $x \in M$.
   (e) $F : M^{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $F(A) = \det A$
2. Najděte duální bázi k bázi $\{(3, 5), (2, 3)\} \subset \mathbb{R}^2$.
3. Najděte bázi $M \subset \mathbb{R}^2$, k níž je báze $\{f_1, f_2\}$, kde $f_1((x_1, x_2)) = 3x_1 - x_2$, $f_2((x_1, x_2)) = -8x_1 + 3x_2$, duální.
4. V prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem uvažujme vektory $u_1 = (4, 1)$, $u_2 = (3, 1)$ a definujme lineární formy $f_i(v) := (u_i, v)$ pro $i = 1, 2$. Najděte bázi duální k $\{f_1, f_2\}$.
5. Na prostoru $P^2(\mathbb{R})$ uvažujme lineární formy $f_i : p(x) \mapsto p^{(i)}(0)$, $i \in \{0, 1, 2\}$. Dokažte, že $\{f_0, f_1, f_2\}$ je báze a najděte bázi k ní duální.
6. Nechť $M = \{(1, 1), (1, -1)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$, definujme lineární formu f na $\mathbb{R}^2$ vztahem $f(u) = x_1 + 2x_2$ pro $(u)_M = (x_1, x_2)$ (souřadnicové vyjádření f vzhledem k M). Najděte souřadnicové vyjádření f vzhledem k bázi $\{(1, -2), (3, 2)\}$.
7. Lineární formy f_1, f_2, f_3 mají vzhledem k M souřadnicové vyjádření $f_1(u) = x_1 + x_2 + x_3$,$f_2(u) = x_1 - x_3$,$f_3(u) = x_1 - 4x_2 - 3x_3$. Najděte bázi N, vůči níž mají tyto formy souřadnicová vyjádření $f_1(u) = x'_1 + x'_2$, $f_2(u) = x'_2 + x'_3$, $f_3(u) = x'_1 + x'_3$.
8. Nechť $M = \{(2, 1), (3, 1)\}$, $N = \{(4, -1), (-3, 1)\}$, $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ má souřadice vzhledem k M^* rovny $(2, 5)$. Určete $(f)_{N^*}$.
9. Na prostoru $(P^2(\mathbb{R}))^*$ najděte matici přechodu od báze $\{p(0), p'(0), p''(0)\}$ k bázi $\{p(1), p'(1), p''(1)\}$. Lineární formy jsou definovány ve smyslu úlohy 5.

10. Nechť V je vektorový prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše n, $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Ověřte, že množina zobrazení $M = \{F_0, \ldots, F_n\}$, kde $F_i : V \to \mathbb{R}$ je definováno $F_i(p) = p(c_i)$, tvoří bázi V^*. Ověřte, že množina $\{p_0, \ldots p_n\}$ tzv. Lagrangeových polynomů

$$p_i(x) := \Pi_{j \neq i} \frac{(x - c_j)}{(c_i - c_j)}$$

tvoří duální bázi k M.