Řešení 5

Ad 1. a) a d) ano, ostatní ne (u b) $f(1,0)+f(0,1) \neq f(1,1)$, u c) $f(0,0) \neq 0$, u e) determinant není v tomto smyslu lineární)

Ad 2. Duální báze k $\{(3,5),(2,3)\}$ je $\{2x_2 - 3x_1, 5x_1 - 3x_2\}$.

Ad 3. Podobná úloha, vychází duální báze $\{(3,8),(1,3)\}$.

Ad 4. Pro $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ je $f_1 = 4x_1 + x_2$, $f_2 = 3x_1 + x_2$. Duální báze vyjde $\{(1,-3),(-1,4)\}$.

Ad 5. Počet f_i je roven dimenzi $(P^2(\mathbb{R}))^*$ (tedy třem), zjišťujeme zdali jsou lineárně nezávislé. Nechť tedy existují $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall p(x) \in P^2(\mathbb{R})$ platí $af_0(p) + bf_1(p) + cf_2(p) = 0$. Dosazením postupně x^2, x a 1 za $p(x)$ zjistíme

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 2 &= 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 &= 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

tedy všechny koeficienty jsou nulové, a $\{f_0, f_1, f_2\}$ opravdu tvoří bázi. Vyjádříme-li polynom jako $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, zjistíme, že $f_0(p) = a_0$, $f_1(p) = a_1$, $f_2(p) = 2a_2$ a ze soustavy jednoduchých rovnic získáme tvar duální báze, vychází $\left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\}$.

Ad 6. Matice přechodu je $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Souřadnice formy f vůči nové duální bázi získáme např. vynásobením této matice zleva řádkovým vektorem původních souřadnic $(1,2)$. Vychází $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$.

Ad 7. Ze zadání známe souřadnice forem vzhledem k M^* a hledáme matici přechodu P, která podobně jako u příkladu 6. tyto souřadnice přetransformuje na požadované nové. Z rovnice s maticemi vychází

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Ad 8. Podobně jako u 7. Matice přechodu od M k N je $P = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, tedy $(f)_{N^*} = (16, -13)$. Nebo například vidíme, že $f((2,1)) = 2$, $f((3,1)) = 5$, tedy $f((1,0)) = 3$ a $f((0,1)) = -4$, a tedy konečně $f((4,-1)) = 16$, $f((-3,1)) = -13$ (nemusíme počítat matici přechodu).

Ad 9. Vyjádříme-li polynom $p(x)$ jako $p(x) = ax^2 + bx + c$, vidíme že $p(x)' = 2ax + b$, $p(x)'' = 2a$ a

$$p(0) = c,\ p'(0) = b,\ p''(0) = 2a$$

$$p(1) = a + b + c,\ p'(1) = 2a + b,\ p''(1) = 2a$$

tedy $p(1) = p(0) + p'(0) + \frac{p''(0)}{2}$, $p'(1) = p'(0) + p''(0)$, $p''(1) = p''(0)$ a hledaná matice přechodu tak je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ad 10. Počet vektorů v M je opět roven dimenzi V (tedy $n+1$), ověření této báze tedy spočívá v důkazu lineární nezávislosti prvků M. Postupným dosazováním $1, x, \dots, x^{n-1}, x^n$ za $p(x)$ do $\sum_{i=0}^{n} a_i F_i(p) = 0$, kde a_i jsou koeicienty, o kterých máme dokázat, že jsou nulové, získáme pro a_i soustavu s Vandermondovou maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_0^2 & c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0^n & c_1^n & c_2^n & \cdots & c_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

pokud se podíváme na determinant této matice, platí

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_0^2 & c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0^n & c_1^n & c_2^n & \cdots & c_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (c_i - c_j)$$

tedy pro různé konstanty c_i je determinant nenulový, matice je regulární, a soustava má pouze triviální řešení což znamená, že prvky F_i jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi. U Lagrangeových polynomů vidíme, že

$$p_i(c_i) = \prod_{j \neq i} \frac{(c_i - c_j)}{(c_i - c_j)} = 1 = F_i(p_i)$$

$$p_k(c_i) = \prod_{j \neq k} \frac{(c_i - c_j)}{(c_k - c_j)} = \dots \frac{(c_i - c_i)}{(c_k - c_i)} \dots = 0 = F_i(p_k) \qquad (\text{zde } i \neq k)$$

což znamená, že $\forall i, k \in 0 \mathinner{..} n \,:\, F_i(p_k) = \delta_k^i$ (definice duální báze).