Lineární algebra pro fyziky - LS 09/10

Příklady 2 - Jordanův tvar podruhé

1. Najděte Jordanův tvar matice

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Na prostoru $P^2(\mathbb{R})$ najděte Jordanovu bázi endomorfismu F, který polynomu $p(x)$ přiřazuje polynom $2p(x+1) - xp'(x)$.

4. Na prostoru $P^2(\mathbb{R})$ najděte Jordanovu bázi endomorfismu F, který polynomu $p(x)$ přiřazuje polynom $p'(x) - x^2p''(x)$.

5. Na prostoru $\langle 1, y, x\rangle$ polynomů ve dvou proměnných stupně nejvýše jedna uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x,y)$ předpisem

$$F(p(x,y)) = y\frac{\partial}{\partial x}p(x,y) + (1-y)\frac{\partial}{\partial y}p(x,y)$$

   Najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

6. Na prostoru $\langle 1, y, x, x^2, xy, y^2\rangle$ polynomů ve dvou proměnných stupně nejvýše dva uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x,y)$ předpisem

$$F(p(x,y)) = x\frac{\partial}{\partial y}p(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}p(x,y)$$

   Ověřte, že tento endomorfizmus je nilpotentní, najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

7. Najděte Jordanův tvar matice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Najděte Jordanův tvar matice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Nechť p je polynom a J Jordanova buňka stupně k s vlastním číslem 0. Dokažte, že

$$p(J) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) & \frac{p''(0)}{2!} & \dots & \frac{p^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \\ 0 & p(0) & p'(0) & \dots & \frac{p^{(k-2)}(0)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & p(0) & \dots & \frac{p^{(k-3)}(0)}{(k-3)!} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & p(0) \end{pmatrix}$$

10. Nechť A je nilpotentní matice, označme číslem k maximální délku řetízku v Jordanově bázi. Pomocí předchozí úlohy dokažte, že dva libovolné polynomy p a q splňují $p(A) = q(A)$ právě tehdy, když $p^{(i)}(0) = q^{(i)}(0)$ pro všechna $i \in \{0, \dots, k-1\}$.