Řešení druhé sady úloh

Ad 1. Jsou to tvary mající řetězce typů {5},{4,1},{3,2},{3,1,1},{2,2,1},{2,1,1,1},{1,1,1,1,1}.

A tedy Jordanovy tvary matic jsou

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Ad 2. Derivace snižuje stupeň polynomu, konstanty je nulová (je vidět, že je nilpotentní). V bázi $\left(1, x, \frac{x^2}{2}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \frac{x^n}{n!}\right)$ bude matice tohoto zobrazení mít tvar Jordanovy buňky stupně n+1.

Ad 3. Podobné jako u 2. Báze stejná, jen přeuspořádaná pro sudé a liché mocniny (zobrazení má dva maximální řetězce). Jordanův tvar tedy bude tvořen blokově diagonální maticí s dvěma Jordanovými buňkami řádů k.

Ad 4. Označme matici ze zadání A. Spočteme, že $A^2 = 0$, z čehož plyne, že řetězce mají délku 2. Dále platí $dim\, Ker\, A = 4 - h(A) = 2$, tedy řetězce jsou dva. Celkem tedy matice vychází

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Ad 5. Označme matici ze zadání A. Matice má jediné (trojnásobné) vlastní číslo $\lambda = -1$. Nechť $A_{-1} = A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 3&6&-15\\ 1&2&-5\\ 1&2&-5 \end{pmatrix}$. Vidíme, že $dim\, Ker\, A_{-1} = 3 - h(A_{-1}) = 3 - 1 = 2$. Tedy maximální řetězce jsou dva, přičemž (pouze, kvůli dimenzi) jeden musí být délky dva. Z čehož

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ad 6. Obdobným postupem jako u 5. dojdeme k výsledku. Opět trojnásobné vlastní číslo, zde $\lambda = 1$. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$, $A_1^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $A_1^3 = 0$. Existuje tedy jeden řetězec délky 3 a Jordanův tvar je

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ad 7. Předně vidíme, že Tr A = Tr B a det A = det B. Tedy podobnost není vyloučená. Dokážeme ji nalezením U. Výpočtem dojdeme k

$$U \in < \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} >$$

např. $U = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ad 8. Jak známo, při umocňování Jordanovy buňky se posunuje řada jedniček směrem k pravému hornímu rohu a tedy

$$J_0^{k-1} = \begin{pmatrix} \dots & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Pro tuto matici existují řetězce

$$e_k \longrightarrow e_1 \longrightarrow 0$$

$$e_2 \longrightarrow 0$$
$$\vdots$$
$$e_{k-1} \longrightarrow 0$$

kde e_i je prvek kanonické baze. Tedy Jordanův tvar se bude skládat z jedné buňky stupně 2 a k-2 buněk stupně 1.

Ad 9. U prostoru dimenze menší než 4 můžeme určit tvar maximálních řetězců (a tedy i J_A) pouze ze znalosti dim Ker A (vypočteno jako dimenze prostoru - hodnost matice), neboť u dimenze 2 existují pouze možnosti

$$v_2^1 \longrightarrow v_1^1 \longrightarrow 0 \text{ nebo } \begin{array}{c} v_1^1 \longrightarrow 0 \\ v_1^2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

podobně u dimenze 3 existují možnosti

$$v_3^1 \longrightarrow v_2^1 \longrightarrow v_1^1 \longrightarrow 0, \quad \begin{array}{c} v_2^1 \longrightarrow v_1^1 \longrightarrow 0 \\ v_1^2 \longrightarrow 0 \end{array}, \quad \begin{array}{c} v_1^1 \longrightarrow 0 \\ v_1^2 \longrightarrow 0 \\ v_1^3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

V dimenzi 4 existuje již pět typů maximálních řetězců, přičemž dvakrát je dim Ker A $= 2$, a až podle dimenze Ker A^2 tyto situace rozlišíme (podobně i v dimenzi 5 nám stačí pro rozlišení tyto dvě hodnosti). Pokud tedy bude tvar maximálních řetězců stejný u A i B, pak jsou obě podobné stejnému Jordanovu tvaru a tedy i navzájem.

Ad 10. Zprvu je vidět, že matice nemůže být zároveň regulární a nilpotentní: nechť A je regulární a nilpotentní. Pak $\exists A^{-1} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : A^k = 0$. Poté ale $A^k \cdot (A^{-1})^k = 0$, což je spor. Tedy pokud je matice nilpotentní, pak je singulární. Naopak např. matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je singulární, ale není nilpotentní, tedy opačná implikace neplatí.