

Lineární algebra pro fyziky - LS 09/10

Příklady 2 - Jordanův tvar

1. Napište všechny možné Jordanovy tvary nilpotentní matice 5×5 .
2. Uvažujte zobrazení $F : P^n(\mathbb{R}) \rightarrow P^n(\mathbb{R})$, které polynomu přiřadí jeho první derivaci. Ukažte, že je to nilpotentní zobrazení a najděte Jordanovu bázi a Jordanův tvar.
3. Uvažujte zobrazení $F : P^{2k-1}(\mathbb{R}) \rightarrow P^{2k-1}(\mathbb{R})$, které polynomu přiřadí jeho druhou derivaci. Ukažte, že je to nilpotentní zobrazení a najděte Jordanovu bázi a Jordanův tvar.
4. Najděte Jordanův tvar nilpotentní matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Najděte Jordanův tvar matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

6. Najděte Jordanův tvar matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

7. Dokažte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

jsou podobné a najděte matici U takovou, že $UAU^{-1} = B$.

8. Nechť J_0 je Jordanova buňka stupně k s vlastním číslem 0. Najděte matici J_0^{k-1} a určete její Jordanův tvar a Jordanovu bázi.

9. Necht' A, B jsou dvě nilpotentní matice typu $n \times n$. Uka'zte, že pro $n = 2, 3$ můžete rozhodnout o tom, zda jsou A a B podobné, pouze na základě jejich hodnoti, ale pro $n = 4$ už ne. Uka'zte, že pro $n = 4$ vám stačí navíc znát hodnotu jejich druhých mocnin.
10. Jsou všechny nilpotentní matice singulární? Jsou všechny singulární matice nilpotentní? Najděte důkaz nebo protipříklad.