Lineární algebra pro fyziky - LS 09/10

Příklady 1 - Spektrum matice

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice 2x2
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$
2. Najděte matici přechodu od báze vlastních vektorů do kanonické báze pro matici
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$
3. Ověřte, že báze vlastních vektorů matice je ortogonální:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
4. Diagonalizujte matici
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$
5. Dokažte, že matice je regulární, právě když všechna její vlastní čísla jsou nenulová.
6. Najděte nějakou matici 2x2, která není diagonální a má vlastní čísla 5 a 6.
7. Nechť
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Rozhodněte, zda existuje matice U taková, že $UAU^{-1} = B$, a pokud ano, najděte ji.
8. Najděte vztah pro n-tý člen rekurentní posloupnosti $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $a_1 = a_2 = 1$.
9. Sestavte charakteristický polynom matice
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Určete koeficient u λ^2 v charakteristickém polynomu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Najděte vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

12. Nechť $q(x)$ je polynom a A je matice. Vysvětlete, jak byste spočítali hodnotu $q(A)$ pomocí vlastních čísel A.
13. Ověřte, že pro libovolnou matici 2x2 platí $p_A(A) = 0$, kde p_A je charakteristický polynom matice A.
14. Dokažte, že charakteristický polynom matice A a matice UAU^{-1} jsou stejné.