Co mají společného karetní hra a renesanční malíři, aneb vyrobte si svůj vlastní Dobble

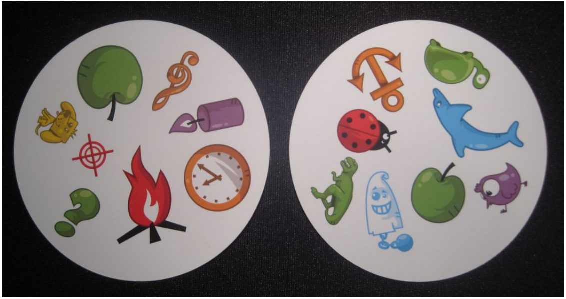
Dalibor Šmíd

MFF UK

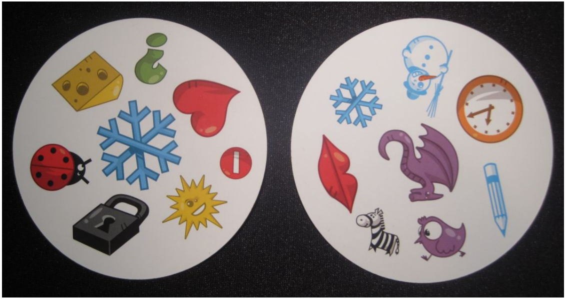
Festival Fantazie Chotěboř 2013

Dobble - postřehová karetní hra

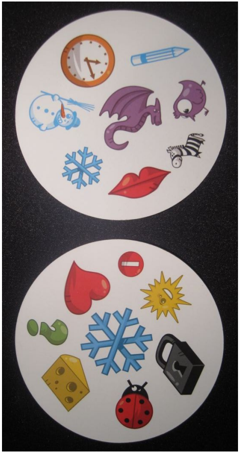
Dobble - postřehová karetní hra



Dobble - postřehová karetní hra

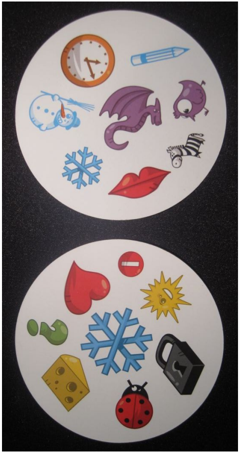


Dobble v kostce



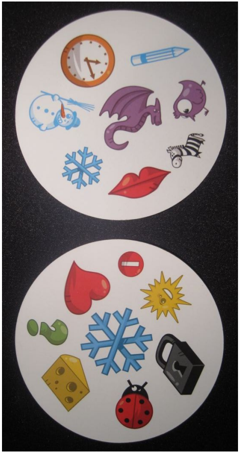
- 55 kartiček

Dobble v kostce



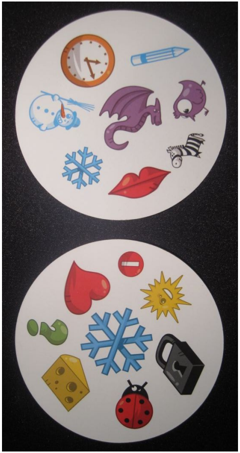
- 55 kartiček
- 8 symbolů na kartičce

Dobble v kostce



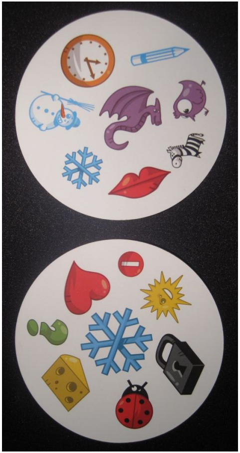
- 55 kartiček
- 8 symbolů na kartičce
- **Každé dvě kartičky mají společný symbol.**

Dobble v kostce



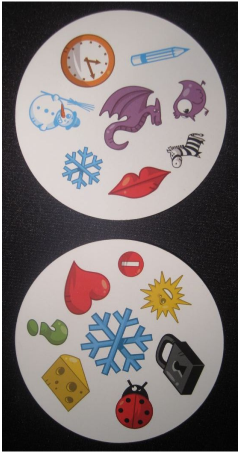
- 55 kartiček
- 8 symbolů na kartičce
- **Každé dvě kartičky mají společný symbol.**
- 5 herních variant, založených na co nejrychlejším hledání společného symbolu

Dobble v kostce



- 55 kartiček
- 8 symbolů na kartičce
- **Každé dvě kartičky mají společný symbol.**
- 5 herních variant, založených na co nejrychlejším hledání společného symbolu
- pro 2–8 hráčů, lze i víc

Dobble v kostce



- 55 kartiček
- 8 symbolů na kartičce
- **Každé dvě kartičky mají společný symbol.**
- 5 herních variant, založených na co nejrychlejším hledání společného symbolu
- pro 2–8 hráčů, lze i víc
- iPhone/iPad verze, Android klon Couple s 54 kartami

Perspektiva v umění

Jak znázornit, co je na obraze blíž a co dál?

Perspektiva v umění

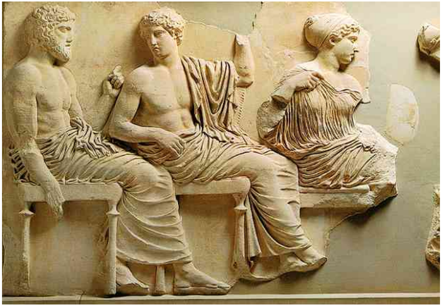
Jak znázornit, co je na obraze blíž a co dál?

Egypt

Co je blíž, namalujeme níž.

Perspektiva v umění

Jak znázornit, co je na obraze blíž a co dál?



Antika

Bližší překrývá vzdálenější.

Perspektiva v umění

Jak znázornit, co je na obraze blíž a co dál?

Čína

Axonometrická perspektiva.

Perspektiva v umění

Jak znázornit, co je na obraze blíž a co dál?

Evropský středověk

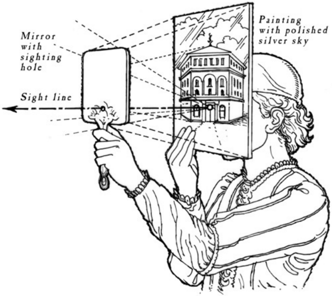
Vzdálenější je menší.

Renesanční revoluce

Nalezení geometrických zákonitostí perspektivy

Renesanční revoluce

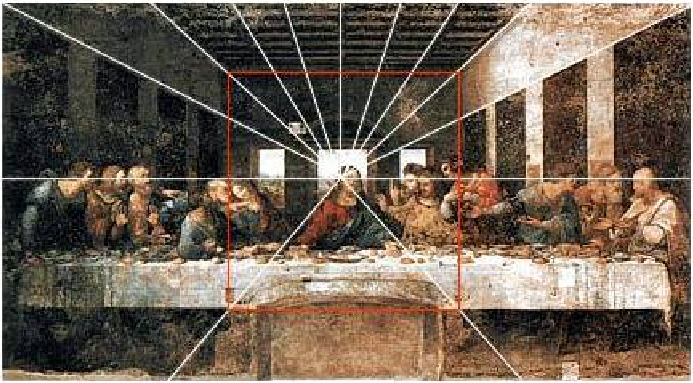
Nalezení geometrických zákonitostí perspektivy



Filippo Brunelleschi (1377 – 1446) - perspektivní zobrazení
Křtitelnice sv. Jana ve Florencii s pomocí zrcadla

Renesanční revoluce

Nalezení geometrických zákonitostí perspektivy



Leonardo da Vinci (1452 – 1519) - perspektiva jako nástroj kompozice

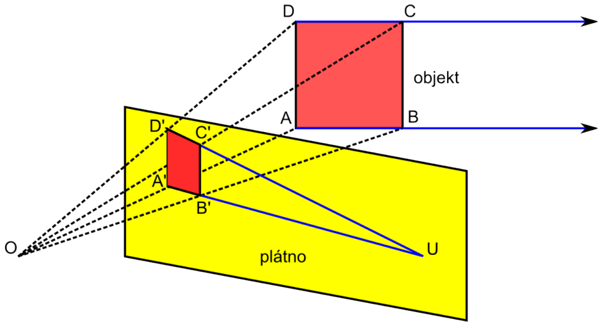
Renesanční revoluce

Nalezení geometrických zákonitostí perspektivy

Albrecht Dürer (1471–1528) - kreslící stroje

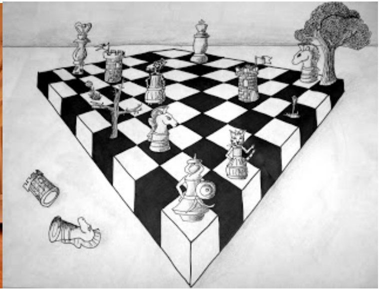
Úběžník

Rovnoběžky, které nejsou rovnoběžné s rovinou plátna, se v perspektivním zobrazení protínají v **úběžníku**.



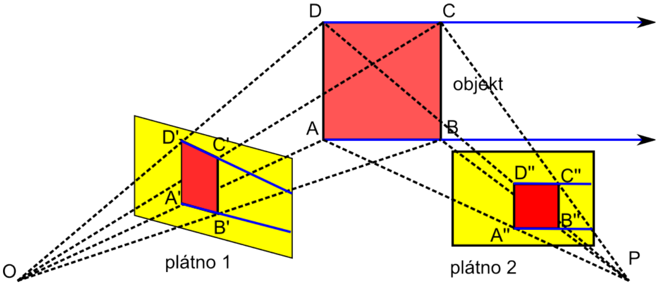
Úběžník

Rovnoběžky, které nejsou rovnoběžné s rovinou plátna, se v perspektivním zobrazení protínají v **úběžníku**.

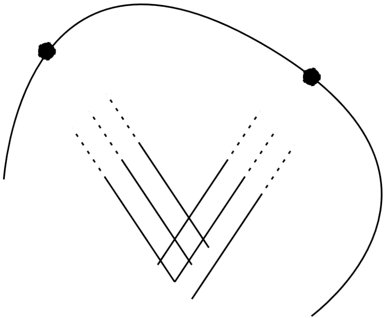


Rovnoběžky a různoběžky

V závislosti na orientaci plátna namalují dva malíři stejnou dvojici rovnoběžek v prostoru jednou jako různoběžky a jednou jako rovnoběžky.

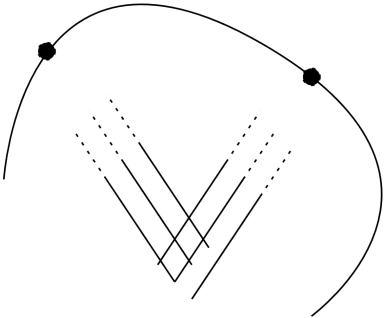


Body v nekonečnu



Francouzský matematik **Girard Desargues** (1591–1661) definoval ke každé množině rovnoběžných přímek jeden nový bod „v nekonečnu“. Rovina doplněná o tyto body se nazývá **projektivní rovina**. Každá dvojice přímek v ní má průsečík.

Body v nekonečnu



Francouzský matematik **Girard Desargues** (1591–1661) definoval ke každé množině rovnoběžných přímek jeden nový bod „v nekonečnu“. Rovina doplněná o tyto body se nazývá **projektivní rovina**. Každá dvojice přímek v ní má průsečík.

Navíc definujeme „přímku v nekonečnu“ jako množinu všech bodů v nekonečnu. Pak každé dva body určují právě jednu přímku.

Počítání na ciferníku

Každá přímka je kopie množiny reálných čísel. Matematici ale studují i jiné číselné množiny.

Počítání na ciferníku

Každá přímka je kopie množiny reálných čísel. Matematici ale studují i jiné číselné množiny.

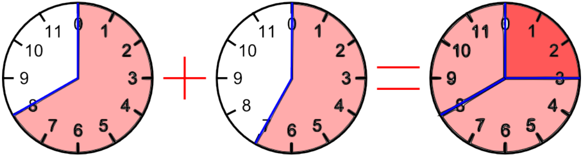
Například množina $\mathbb{Z}_p := \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, v níž se sčítá a násobí pomocí tzv. modulární aritmetiky.

Počítání na ciferníku

Každá přímka je kopie množiny reálných čísel. Matematici ale studují i jiné číselné množiny.

Například množina $\mathbb{Z}_p := \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, v níž se sčítá a násobí pomocí tzv. modulární aritmetiky.

Pro $p = 12$ je to obyčejné sčítání na hodinovém ciferníku:



Počítání v $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$

Pokud má „ciferník“ jen 2 „hodiny“ 0 a 1, odpovídá modulární sčítání a násobení logickým operacím XOR a AND:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Počítání v $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$

Pokud má „ciferník“ jen 2 „hodiny“ 0 a 1, odpovídá modulární sčítání a násobení logickým operacím XOR a AND:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Podobně pro $p = 3$ máme následující tabulky operací:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times$	0	1	2	3	4

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2

Počítání v $\mathbb{Z}_5$

Ještě zkusme $p = 5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

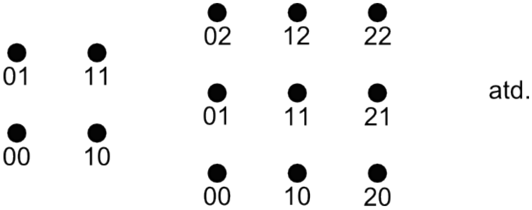
Přímka a rovina v $\mathbb{Z}_p$

Přímka definovaná pomocí modulární aritmetiky na rozdíl od reálné přímky obsahuje jen konečný počet p bodů.

Přímka a rovina v $\mathbb{Z}_p$

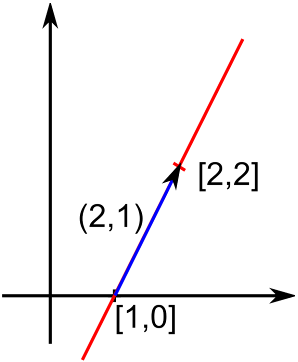
Přímka definovaná pomocí modulární aritmetiky na rozdíl od reálné přímky obsahuje jen konečný počet p bodů.

Rovina je vlastně jen mřížka o p^2 bodech.



Přímky v rovině

Přímka se nejlépe zadá parametricky, pomocí bodu, který na ní leží, a směrového vektoru.

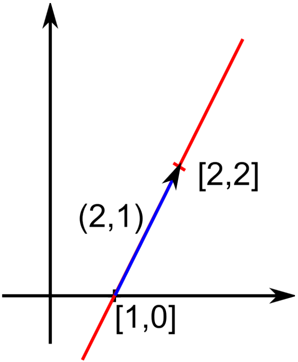


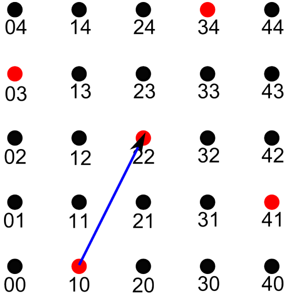
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

Přímky v rovině

Přímka se nejlépe zadá parametricky, pomocí bodu, který na ní leží, a směrového vektoru.





$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

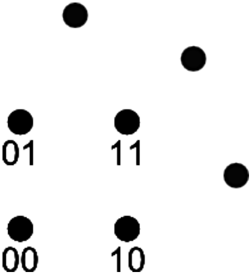
$$t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

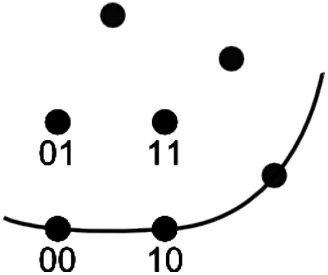
Projektivní rovina stupně 2

Rovnoběžné přímky mají stejné (až na násobek) směrové vektory. Proto body v nekonečnu odpovídají právě směrovým vektorům.



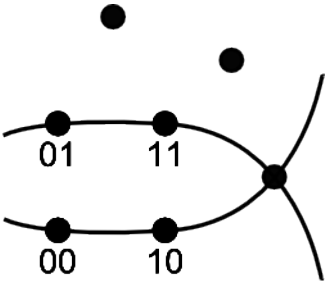
Projektivní rovina stupně 2

Rovnoběžné přímky mají stejné (až na násobek) směrové vektory. Proto body v nekonečnu odpovídají právě směrovým vektorům.



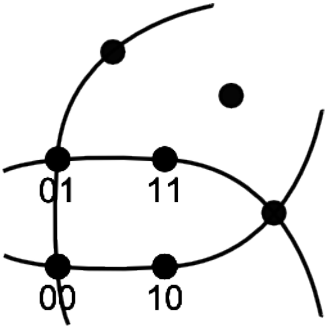
Projektivní rovina stupně 2

Rovnoběžné přímky mají stejné (až na násobek) směrové vektory. Proto body v nekonečnu odpovídají právě směrovým vektorům.



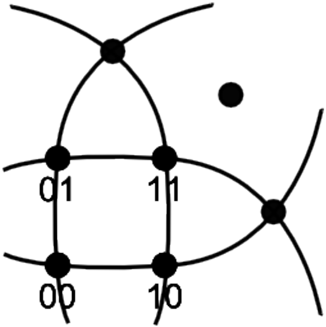
Projektivní rovina stupně 2

Rovnoběžné přímky mají stejné (až na násobek) směrové vektory. Proto body v nekonečnu odpovídají právě směrovým vektorům.



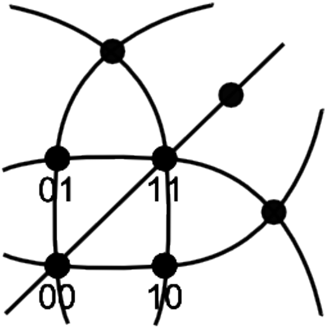
Projektivní rovina stupně 2

Rovnoběžné přímky mají stejné (až na násobek) směrové vektory. Proto body v nekonečnu odpovídají právě směrovým vektorům.



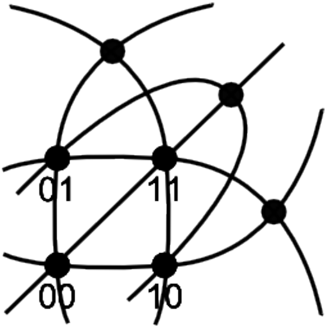
Projektivní rovina stupně 2

Rovnoběžné přímky mají stejné (až na násobek) směrové vektory. Proto body v nekonečnu odpovídají právě směrovým vektorům.



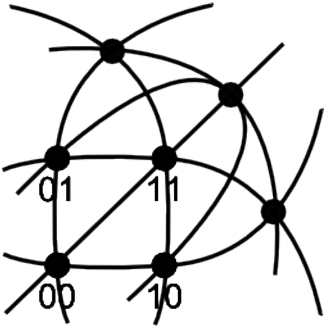
Projektivní rovina stupně 2

Rovnoběžné přímky mají stejné (až na násobek) směrové vektory. Proto body v nekonečnu odpovídají právě směrovým vektorům.



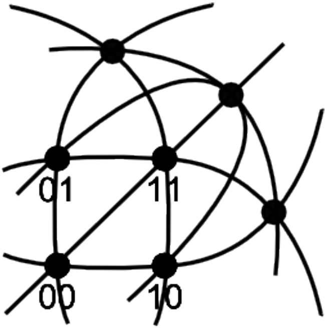
Projektivní rovina stupně 2

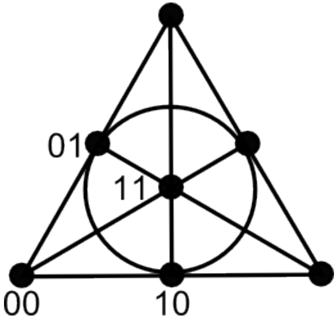
Rovnoběžné přímky mají stejné (až na násobek) směrové vektory. Proto body v nekonečnu odpovídají právě směrovým vektorům.



Projektivní rovina stupně 2

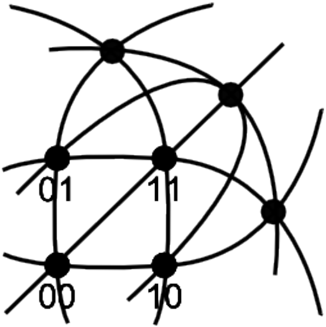
Rovnoběžné přímky mají stejné (až na násobek) směrové vektory. Proto body v nekonečnu odpovídají právě směrovým vektorům.

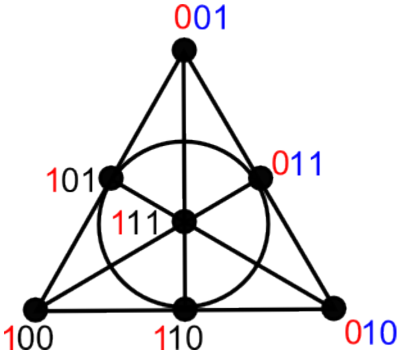




Projektivní rovina stupně 2

Rovnoběžné přímky mají stejné (až na násobek) směrové vektory. Proto body v nekonečnu odpovídají právě směrovým vektorům.





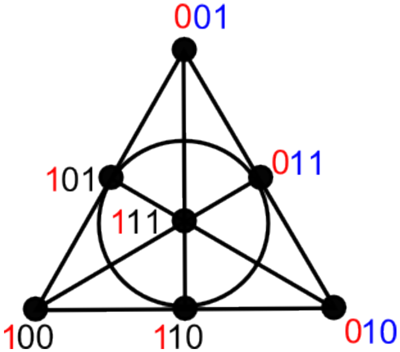
Fanova rovina

Projektivní rovina stupně 2

Rovnoběžné přímky mají stejné (až na násobek) směrové vektory. Proto body v nekonečnu odpovídají právě směrovým vektorům.

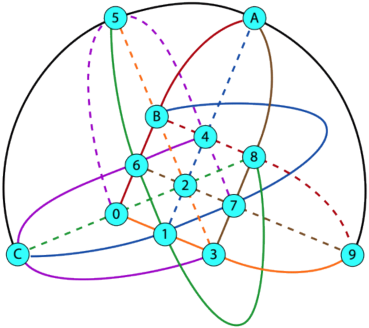
Každá přímka je teď trojice bodů:

Binárně	Dekadicky
100, 110, 010	462
101, 111, 010	572
100, 101, 001	451
110, 111, 001	671
100, 111, 011	473
101, 110, 011	563
001, 011, 010	132



Fanova rovina

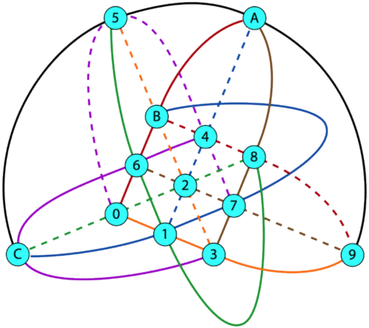
Projektivní roviny vyšších stupňů



Projektivní rovina stupně 3

Projektivní rovina stupně p má p^2 konečných bodů a jednu přímku v nekonečnu, tj. $p + 1$ bodů navíc.

Projektivní roviny vyšších stupňů



Projektivní rovina stupně 3

Projektivní rovina stupně p má p^2 konečných bodů a jednu přímku v nekonečnu, tj. $p+1$ bodů navíc.

Přímek a bodů je vždy stejně. Každá přímka má $p+1$ bodů, každým bodem prochází $p+1$ přímek.

p	$p+1$	p^2+p+1
2	3	7
3	4	13
5	6	31
7	8	57

Dobble je převlečená projektivní rovina

- Stupeň projektivní roviny je 7.

Dobble je převlečená projektivní rovina

- Stupeň projektivní roviny je 7.
- Kartičky jsou body.

Dobble je převlečená projektivní rovina

- Stupeň projektivní roviny je 7.
- Kartičky jsou body.
- Obrázky jsou přímky.

Dobble je převlečená projektivní rovina

- Stupeň projektivní roviny je 7.
- Kartičky jsou body.
- Obrázky jsou přímky.
- Obrázek je na kartičce, pokud přímka prochází bodem.

Dobble je převlečená projektivní rovina

přímka Sýr

- Stupeň projektivní roviny je 7.
- Kartičky jsou body.
- Obrázky jsou přímky.
- Obrázek je na kartičce, pokud přímka prochází bodem.
- Dva body definují přímku $\leftrightarrow$ dvě kartičky obsahují společný obrázek.

Dobble je převlečená projektivní rovina

přímka Sýr

- Stupeň projektivní roviny je 7.
- Kartičky jsou body.
- Obrázky jsou přímky.
- Obrázek je na kartičce, pokud přímka prochází bodem.
- Dva body definují přímku $\leftrightarrow$ dvě kartičky obsahují společný obrázek.
- Ve skutečnosti je karet 55 místo 57, tedy dva body chybí. Zkuste je najít!

Dobble je převlečená projektivní rovina

přímka Sýr

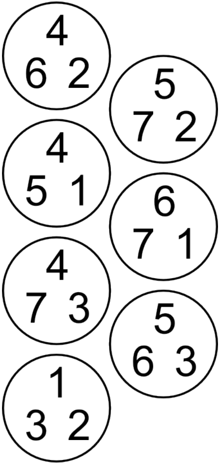
- Stupeň projektivní roviny je 7.
- Kartičky jsou body.
- Obrázky jsou přímky.
- Obrázek je na kartičce, pokud přímka prochází bodem.
- Dva body definují přímku $\leftrightarrow$ dvě kartičky obsahují společný obrázek.
- Ve skutečnosti je karet 55 místo 57, tedy dva body chybí. Zkuste je najít!
- Android klon Couple má 54 karet, tři vynechali.

Dobble je převlečená projektivní rovina

přímka Sýr

- Stupeň projektivní roviny je 7.
- Kartičky jsou body.
- Obrázky jsou přímky.
- Obrázek je na kartičce, pokud přímka prochází bodem.
- Dva body definují přímku $\leftrightarrow$ dvě kartičky obsahují společný obrázek.
- Ve skutečnosti je karet 55 místo 57, tedy dva body chybí. Zkuste je najít!
- Android klon Couple má 54 karet, tři vynechali.
- Dobble Kids má 30 karet a 6 obrázků na kartě, je to tedy projektivní rovina stupně 5 s vynechaným jedním bodem.

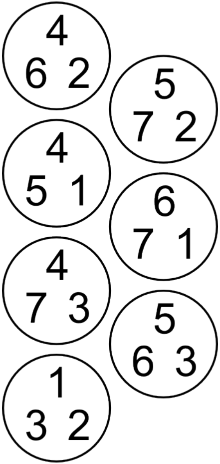
Vyrobte si vlastní Dobble!



Dobble stupně 2

- Konstrukce umožňuje sestavit si „dobbly“ libovolného **prvočíselného** stupně p.

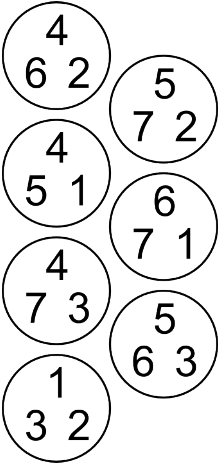
Vyrobte si vlastní Dobble!



Dobble stupně 2

- Konstrukce umožňuje sestavit si „dobbly" libovolného **prvočíselného** stupně p.
- Pro $p = 4$ a 8 funguje konstrukce také, pro 6 a 10 žádný „dobble" neexistuje, pro $p = 9$ existují čtyři neekvivalentní. Případ $p = 12$ je dosud otevřený.

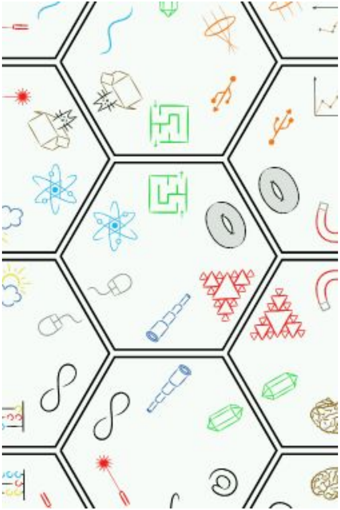
Vyrobte si vlastní Dobble!



Dobble stupně 2

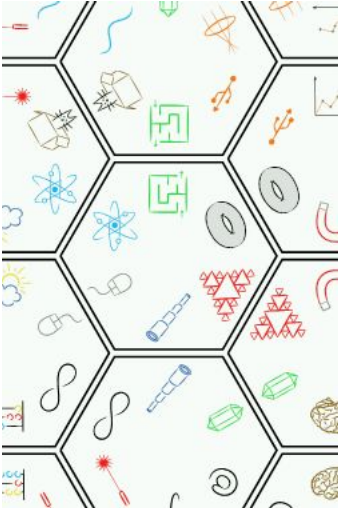
- Konstrukce umožňuje sestavit si „dobbly“ libovolného **prvočíselného** stupně p.
- Pro $p = 4$ a 8 funguje konstrukce také, pro 6 a 10 žádný „dobble“ neexistuje, pro $p = 9$ existují čtyři neekvivalentní. Případ $p = 12$ je dosud otevřený.
- Můžeme zvýšit dimenzi a místo bodů a přímek v rovině pracovat s body a rovinami v prostoru. Protože rovina je určena třemi body, bude mít společný symbol každá **trojice** karet.

Matfyzácké Hexeso



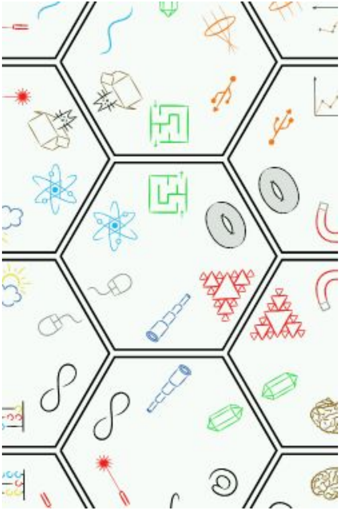
- 31 kartiček tvořících „dobble stupně 5“.

Matfyzácké Hexeso



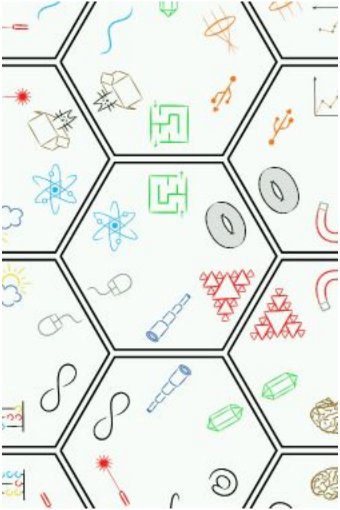
- 31 kartiček tvořících „dobble stupně 5“.
- Kartičky šetiúhelníkové, se symboly po obvodu.

Matfyzácké Hexeso



- 31 kartiček tvořících „dobble stupně 5“.
- Kartičky šetiúhelníkové, se symboly po obvodu.
- Dají se sestavit do plánu, který periodicky dláždí rovinu.

Matfyzácké Hexeso



- 31 kartiček tvořících „dobble stupně 5“.
- Kartičky šetiúhelníkové, se symboly po obvodu.
- Dají se sestavit do plánu, který periodicky dláždí rovinu.
- Dá se s ním hrát totéž, co s Dobblem, ale navíc se dá využít existence dláždění $\rightarrow$ neomezený prostor pro vymýšlení vlastních her.