

# Geometrie III

## Typové příklady ke zkoušce

1. Určete kuželosečku  $11x^2 + 4xy + 14y^2 - 4x - 28y - 16 = 0$ , najděte její střed, délky poloos a směry os.
2. Ukažte, že kuželosečka  $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 8y + 5 = 0$  je parabola, najděte její vrchol a osu.
3. Kvadriku

$$5x^2 - 16xy - 16xz - 7y^2 - 32yz - 7z^2 + 6x + 66y + 12z + 27 = 0$$

převeďte do kanonického tvaru, určete její typ, spočítejte střed.

4. Určete typ afinních kuželoseček pouze počítáním signatur a determinantů:
  - (a)  $6x^2 - 12y^2 + 14xy - 26x + 10y + 8 = 0$
  - (b)  $9x^2 + y^2 - 6xy + 12x - 4y + 3 = 0$
  - (c)  $4x^2 + 2y^2 + 6xy + 2x + 2y + 3 = 0$
5. Spočítejte inverzní transformaci k afinní transformaci

$$\tau(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

6. Najděte afinní transformaci, která zobrazuje body  $(1, -1)$ ,  $(2, -2)$  a  $(3, -4)$  na body  $(8, 13)$ ,  $(3, 4)$ , respektive  $(0, -1)$ .
7. Dokažte, že každá hyperbola se dá afinní transformací převést na hyperbolu  $xy = 1$ .
8. Vyjádřete projektivní body  $[2, 2, 3]$  a  $[3, 3, 7]$  ve tvaru  $[x, y, 1]$ . Napište rovnici projektivní přímky těmito dvěma projektivními body.
9. Najděte projektivní transformaci, která zobrazuje projektivní body  $[-1, 0, 0]$ ,  $[-3, 2, 0]$ ,  $[2, 0, 4]$  a  $[1, 2, -5]$  na body  $[2, 1, 0]$ ,  $[1, 0, -1]$ ,  $[0, 3, -1]$ , respektive  $[3, -1, 2]$ .
10. Spočítejte dvojpoměr  $(ABCD)$ , kde  $A = [2, 1, 3]$ ,  $B = [1, 2, 3]$ ,  $C = [8, 1, 9]$ ,  $D = [4, -1, 3]$ .
11. Pokud pro dvojpoměr platí  $(ABCD) = k$ , čemu se rovná dvojpoměr  $(BACD)$ ,  $(ACBD)$  a dalších permutací stejných bodů?
12. Čtyři body leží v jedné přímce, v pořadí  $ABCD$ . Vzdálenost  $|AB|$  je 2, vzdálenost  $|BC|$  je 1, vzdálenost  $|CD|$  je 3. Určete dvojpoměr  $(ABCD)$ .
13. Najděte obraz kružnice o středu  $(2, 2)$  a poloměru 1 v kruhové inverzi podle jednotkové kružnice (střed v počátku, poloměr 1).
14. Napište inverzní Möbiovskou transformaci k  $M(z) = \frac{z-2i}{z+2}$ . Určete v transformaci  $M$  obraz (značíme  $z = x + iy$ )
  - (a) přímky s rovnicí  $x + y = 2$ .

(b) kružnice o středu v bodě  $(-1, 0)$  a poloměru 1.

15. Určete Möbiiovskou transformaci, která zobrazují body  $-1, i, 1$  postupně na  $-1, -3, 0$ .
16. Rozhodněte, zda body  $0, -4, -2i, -1 - 3i$  leží na společné kružnici v komplexní rovině.
17. Najděte nějakou hyperbolickou transformaci, která zobrazuje bod  $-\frac{1}{3}i$  na  $\frac{2}{3}$ .