Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Dalibor Šmíd

Vlastnosti řešení konformně invariantních rovnic ve vyšších dimenzích

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce:
prof. RNDr. Vladimír Souček, DrSc., Matematický Ústav UK

Studijní program Fyzika, obor Teoretická fyzika

Děkuji prof. RNDr. V. Součkovi DrSc. za velkou trpělivost a ochotu a za řadu vysvětlení, rad a připomínek, bez nichž bych se v tématu stěží sám zorientoval. Děkuji svým rodičům za láskyplnou podporu v průběhu celého studia.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 16. 8. 2001 Dalibor Šmíd

Obsah

Úvod

V knize [**PR84**], rozsáhlé dvojdílné monografii o twistorové teorii, uvádějí její autoři Roger Penrose a Wolfgang Rindler příklady souvislostí mezi různými konformně invariantními rovnicemi, jmenovitě mezi rovnicemi pro nehmotné klasické pole ve čtyřech dimenzích o různé helicitě a twistorovou rovnicí. Rovnici pro nehmotné pole zapisují ve formě

$$\nabla^{AA'}\phi_{ABC\ldots L} = 0,$$

kde poloviční počet indexů pole popsaného totálně symetrickým spinorem $\phi_{ABC\ldots L}$ odpovídá jeho helicitě (spinu). Název pochází z pozorování, že v případě dvou indexů je tato rovnice ekvivalentní bezezdrojovým Maxwellovým rovnicím a v případě čtyř indexů rovnicím linearizované gravitace v prázdné oblasti prostoročasu. Twistorová rovnice

$$\nabla_A{}^{(A'}\lambda^{B')} = 0$$

je přeurčená diferenciální rovnice prvního řádu s konečnědimenzionálním prostorem řešení nazývaným prostorem twistorů, jenž je základem Penroseova přístupu k problematice struktury prostoročasu i s ohledem na její kvantové vlastnosti. Zmíněnou souvislostí těchto dvou rovnic je vztah (6.4.20) v druhém díle [**PR84**]

$$\gamma_{A\ldots LM} = \lambda^{M'}\nabla_{MM'}\phi_{A\ldots L} + i(n+1)\rho_{(M}\phi_{A\ldots L)},$$

kde $\rho_A = -i\frac{1}{2}\nabla_{CA'}\lambda^C$ a n je počet indexů pole $\phi_{A\ldots L}$. V knize je nazýván zvyšováním helicity, protože platí, že pokud je $\lambda^{M'}$ řešením twistorové rovnice a $\phi_{A\ldots L}$ řešením rovnice pro nehmotné pole, je levá strana také řešením rovnice pro nehmotné pole, ovšem se spinem o $\frac{1}{2}$ vyšším. Operace snižování helicity

$$\gamma_{A\ldots K} = \phi_{A\ldots KL}\lambda^L$$

uváděná tamtéž, zase převádí pomocí řešení twistorové rovnice řešení rovnice pro nehmotné pole na řešení téže rovnice se spinem o $\frac{1}{2}$ nižším. Obojí je definováno v plochém prostoročase.

Koncem roku 1999 uveřejnili David Calderbank a Tammo Diemer práci [**CD99**], v níž studovali matematické objekty zvané BGG posloupnosti v případě variet s nenulovou křivostí. BGG posloupnosti jsou analogie de Rhamových komplexů vnějších diferenciálů a užívají se k systematickému studiu invariantních diferenciálních operátorů. Byly zavedeny Bernsteinem, Gelfandem a Gelfandem v práci [**BGG71**] a jejich teorie byla rozvíjena Bastonem, Čapem, Eastwoodem, Slovákem, Součkem a dalšími např. v pracích [**BE89, CSS00, CSS01**]. Nejvýznamnější motivace pochází z konformní geometrie, viz např. práce [**Sl93**] a odkazy v ní uvedené. Význam Calderbankovy a Diemerovy práce spočívá v tom, že nalezli způsob, jak BGG posloupnosti zavést na varietách, které nelze vyjádřit jako homogenní prostor, tedy faktor dvou Lieových grup G/H splňujících určité další požadavky. Zavedli také na BGG posloupnostech zcela novou multiplikativní strukturu zobecňující vnější součin na de Rhamově komplexu na bilineární diferenciální operátory či jinak řečeno párování.

Právě fyzikální interpretací této multiplikativní struktury a její souvislostí s Penroseovým a Rindlerovým zvyšováním helicity se zabývá tato práce. Jejím cílem je ukázat, že explicitní výpočet Calderbankových a Diemerových diferenciálních párování vede na čtyřrozměrném Minkowského prostoročase právě na operátory zvyšování helicity a že aparát BGG posloupností dovoluje zobecnění těchto operátorů do vyšších dimenzí.

V první, spíše motivační kapitole nastiňujeme souvislost mezi Maxwellovými rovnicemi a de Rhamovým komplexem z diferenciální geometrie a studujeme elektromagnetizmu podobné lineární teorie pole získané přechodem k jiným BGG posloupnostem. Zvláštní důraz je kladen na diferenciální párování, která zde nabývají konkrétního fyzikálního významu například v podobě analogie Gaussovy věty elektromagnetizmu nebo nalezení správného výrazu pro Lorentzovu sílu. Na konci druhého oddílu se poprvé setkáváme se speciálním případem zvyšování helicity, s párováním umožňujícím z řešení Maxwellových rovnic konstruovat řešení obecné lineární teorie pole pomocí řešení twistorové rovnice příslušné téže teorii. Na závěr ukazujeme dva možné příklady klasických lineárních teorií pole s konformní invariancí, z nichž obě byly v minulosti studovány v souvislosti s linearizovanou teorií gravitace.

V kapitole 2 již začínáme rozvíjet matematický aparát potřebný k vyložení matematické teorie zakřivených BGG posloupností a párování na nich. V prvním oddíle zavádíme ve zkratce pojmy z teorie reprezentací Lieových grup a algeber a ve druhém je vykládáme na příkladu algeber $\mathfrak{so}(2k, \mathbb{C})$. K podrobnějšímu stylu výkladu se vracíme až v oddíle o Cliffordových algebrách, pomocí nichž konstruujeme grupu Spin a spinorové reprezentace S^+ a S^-, v jejichž tenzorových součinech lze v dimenzi 4 nalézt libovolnou reprezentaci grupy Spin. Symetrické mocniny reprezentace S^+ později používáme jako moduly $\mathbb{W}$ určující námi zkoumané BGG posloupnosti.

Třetí kapitola je věnována speciálnějším tématům teorie reprezentací. V prvním oddíle definujeme parabolické podalgebry a zmiňujeme některé jejch základní vlastnosti, což ve druhém opět ilustrujeme na relevantním příkladě algebry $\mathfrak{co}(2k-1, 1)$. Třetí oddíl se podrobně věnuje zavedení diferenciálů $d_{\mathfrak{m}}, \delta_{\mathfrak{m}^*}$ Lie-algebraické homologie a kohomologie a jejich vlastnostem.

Čtvrtá kapitola shrnuje základní výsledky práce [**CD99**] včetně podrobných důkazů, v páté kapitole pak stručně zavádíme Penroseovu notaci abstraktních indexů, v níž jsou zapisovány vztahy v [**PR84**], a převádíme do této notace některé vztahy z teorie reprezentací, zejména týkající se Cliffordova násobení a Lie-algebraické (ko)homologie.

Kapitola 6 tvoří jádro práce. V oddíle 1 pomocí teorie z kapitoly 4 odvozujeme tvar párování v případě, v němž očekáváme reprodukci Penroseových a Rindlerových vztahů a skutečně docházíme k přesně stejným rovnicím. Reprezentačně teoretická metoda výpočtu vzbuzuje naději, že by mohla být zobecnitelná do vyšších dimenzí, o což se v oddílech 3 a 4 úspěšně pokoušíme. Kapitola i práce končí obecným tvrzením o tvaru operátoru zvyšování helicity řešení rovnice pro nehmotné pole v libovolné dimenzi o jednu polovinu.

KAPITOLA 1

BGG posloupnosti a lineární teorie pole

V této kapitole bychom rádi učinili alespoň několik poznámek týkajících se souvislosti obecné teorie probírané v kapitole 4 s elektromagnetizmem a dalšími lineárními klasickými teoriemi pole s konformní grupou invariance. Sledujeme zde práci [**Di99**], jejíž ideou bylo formulovat Maxwellovu teorii elektromagnetizmu prostřednictvím BGG posloupností a bilineárních párování z kapitoly 4, vytáhnout z této formulace základní principy jako jsou například zákony zachování nebo rychlost šíření vln rovná c, a uvalit je jako požadavek na obecnou lineární teorii pole. Příklady takových teorií jsou pak v [**Di99**] uváděné linearizované gravitace, Bachova a Penroseova.

1. Elektromagnetizmus jako de Rhamova posloupnost

Pro popis elektromagnetické teorie ve čtyřrozměrném afinním prostoru A s tečným prostorem V je možno s výhodou použít matematický aparát diferenciálních forem a de Rhamova vnějšího diferenciálu d, které dohromady tvoří tzv. de Rhamovu posloupnost

$$C^\infty(\mathsf{A},\mathbb{R}) \xrightarrow{d} C^\infty(\mathsf{A},V^*) \xrightarrow{d} C^\infty(\mathsf{A},\Lambda^2V^*) \xrightarrow{d} C^\infty(\mathsf{A},\Lambda^3V^*) \xrightarrow{d} C^\infty(\mathsf{A},\Lambda^4V^*),$$

v níž platí podmínka komplexu $d^2 = 0$. 2-forma F představuje antisymetrický relativistický tenzor intenzity elektromagnetického pole F_{ab}. Jeho složky F_{12},F_{13} a F_{14} tvoří vektor intenzity elektrického pole měřený v klidové soustavě a F_{23}, F_{24} a F_{34} jsou magnetickým polem. První sada Maxwellových rovnic je ekvivalentní podmínce $dF = 0$, tj. uzavřenosti formy F. Na afinním prostoru je každá uzavřená forma exaktní $F = dA$, 1-forma A reprezentuje čtyřpotenciál. Ten je zadán až na kalibrační transformaci $A \to A + df$, kde f je 0-forma, tedy reálná funkce.

Tato de Rhamova posloupnost má svůj duál, posloupnost

$$C^\infty(\mathsf{A},\mathbb{R}) \xleftarrow{\mathrm{div}} C^\infty(\mathsf{A},V) \xleftarrow{\mathrm{div}} C^\infty(\mathsf{A},\Lambda^2V) \xleftarrow{\mathrm{div}} C^\infty(\mathsf{A},\Lambda^3V) \xleftarrow{\mathrm{div}} C^\infty(\mathsf{A},\Lambda^4V)$$

funkcí, vektorů, bivektorů atd, mezi nimiž působí operátory kodiferenciálu nebo též vnější divergence, které jsou (s minusem) adjungované k příslušným vnějším diferenciálům, tj. $\forall X \in C^\infty(\mathsf{A}, \Lambda^k V^*)$, $Y \in C^\infty(\mathsf{A}, \Lambda^{k+1} V)$ platí

$$\int_{\mathsf{A}} \langle dX, Y \rangle = \int_{\mathsf{A}} \langle X, -\operatorname{div} Y \rangle.$$

Pomocí Hodgeova operátoru $*$ je lze zapsat $\operatorname{div} = *d*$. Hodgeův operátor je algebraická dualita, kterou je možno vyjádřit pomocí úplně antisymetrického tenzoru e_{abcd} vztahem

$$*F^{ab} = \frac{1}{2} e^{abcd} F_{cd} \tag{1}$$

a která splňuje podmínku $*^2 = (-1)^{p+1}$ na p-formách, takže také $\operatorname{div}^2 = 0$. Druhou sadu Maxwellových rovnic je možno psát $\operatorname{div} F = j$, kde čtyřvektorová funkce j reprezentuje zdroje pole. Automaticky platí rovnice kontinuity ve tvaru $\operatorname{div} j = 0$. Díky obecné Stokesově větě umožňuje integrál

$$\int_B *j = \int_B * \operatorname{div} F = \int_B d * F = \int_S *F =: Q_e \tag{2}$$

vyjádřit elektrický náboj uzavřený uvnitř koule B prostřednictvím pole na hraniční sféře S. Z (1) vidíme, že Hodgeova dualita zaměňuje role elektrické a magnetické intenzity, např. $*F^{12} = F^{34}$, takže rovnice $dF = 0$ v sobě vlastně obsahuje předpoklad neexistence magnetických nábojů. Eventuální magnetický náboj uvnitř koule B by bylo možno vyjádřit analogicky jako elektrický

$$Q_m := \int_S F = \int_B dF.$$

Pohybovou rovnici pro volnou částici je možno psát jako rovnici geodetiky $\nabla_N N = 0$, kde ∇ je kovariantní derivace a N je tečný vektor ke světočáře. V přítomnosti elektromagnetického pole se na pravé straně objeví Lorentzova síla, pro částici s nábojem $q \in \mathbb{R}$ bude pohybová rovnice mít tvar

$$m \nabla_N N = q F(\cdot, N)$$

s příslušným zvýšením indexu u 1-formy na pravé straně, aby se mohla rovnat vektoru nalevo.

2. Operátory a párování v obecné teorii pole

De Rhamův komplex je nejjednodušším případem tzv. Bernsteinovy-Gelfandovy-Gelfandovy (BGG) posloupnosti. Každá BGG posloupnost je určena ireducibilní reprezentací $\mathbb{W}$ grupy konformních transformací, u de Rhamova komplexu $\mathbb{W} = \mathbb{R}$. Její tvar je

$$C^\infty(M, H_0) \xrightarrow{\mathcal{D}_0^k} C^\infty(M, H_1) \xrightarrow{\mathcal{D}_1^l} C^\infty(M, H_2) \xrightarrow{\mathcal{D}_2^m} C^\infty(M, H_3) \xrightarrow{\mathcal{D}_3^n} C^\infty(M, H_4)$$

a tvar posloupnosti duální

$$C^\infty(M, H^0) \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0^k} C^\infty(M, H^1) \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1^l} C^\infty(M, H^2) \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_2^m} C^\infty(M, H^3) \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_3^n} C^\infty(M, H^4),$$

kde M je čtyřdimenzionální varieta s konformní strukturou [1] a H_i, H^i bandly nad ní, které je možno získat jako podbandly twistovaných vnějších mocnin $\Lambda^i T^*M \otimes W$, $\Lambda^i TM \otimes W^*$. W je asociovaný fíbrovaný prostor $\mathcal{G} \times_{\mathrm{CO}} \mathbb{W}$ s invariantním skalárním součinem. Operátory $\mathcal{D}_i^k$ zobecňují vnější diferenciál, $\tilde{\mathcal{D}}_i^k$ vnější divergenci a lze také definovat bilineární diferenciální operátory, které jsou zobecněním vnějšího součinu $\wedge$ a kontrakce $\lrcorner$, dobře známých algebraických párování na formách a multivektorech de Rhamova komplexu.

Stejně jako má de Rhamův komplex názornou fyzikální interpretaci pomocí pojmů známých z elektromagnetizmu, očekáváme podobně dobré služby i od obecné BGG posloupnosti. Pro různé reprezentace $\mathbb{W}$ vyjadřuje BGG posloupnost strukturu různých klasických konformně invariantních lineárních teorií pole. První posloupnost z výše uvedených potom nazýváme kinematickou posloupností teorie a prvek $F \in C^\infty(M, H_2)$ kinematickým polem. Kinematickému poli F odpovídá nějaký prvek $G \in C^\infty(M, H^2)$ zvaný dynamické pole. Operátory v kinematické posloupnosti stále nazýváme diferenciály a v dynamické divergencemi. Teorie sdílí některé vlastnosti s elektromagnetizmem: dynamické pole je divergencí zachovávajícího se zdroje, jemu přiřazené dynamické pole lokálně pochází z potenciálu určeného až na kalibrační transformaci a všechny operátory jsou konformně invariantní. Jejich diferenciální řád, který vyznačujeme horním indexem, ovšem už může být vyšší než jedna.

[1] Tedy s hlavním fíbrovaným prostorem $\mathcal{G}$ ortogonálních reperů, nebo také s třídou (pseudo)Riemannovských metrik $\mathsf{c} = \{\lambda^2 g | \lambda \in \mathbb{R}\}$

Jak tedy operátory $\mathcal{D}_i^p$ mohou vypadat? Každý konformně invariantní diferenciální operátor $\mathcal{D} : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ je jednoznačně určen svým řádem a reprezentacemi E a F. Kovariantní derivace je operátor $\nabla : C^\infty(E) \to C^\infty(E \otimes T^*)$ a konformně invariantní operátor prvního řádu jdoucí z řezů s hodnotami v reprezentaci E do ireducibilní reprezentace F může existovat, pouze existuje-li netriviální projekce $\pi : E \otimes T^* \to F$, tedy pokud se reprezentace F vyskytuje v rozkladu tenzorového součinu E s vektorovou reprezentací. Všechny konformně invariantní operátory prvního řádu tak mají jednoduchý tvar

$$\mathcal{D}^1\varphi = \pi\nabla\varphi.$$

Ve vyšších řádech vstupuje do hry v konformní geometrii důležitá veličina $\mathrm{r}^\nabla \in C^\infty(M, T^* \otimes T^*)$, tzv. normalizovaná Ricciho křivost, přesnou definici zde nebudeme potřebovat. Postačí jen hrubá informace, že všechny invariantní diferenciální operátory druhého řádu mají tvar

$$\mathcal{D}^2\varphi = \pi[\nabla^2\varphi + \mathrm{r}^\nabla\,\varphi]$$

a třetího

$$\mathcal{D}^3 = \pi[\nabla^3\varphi + 2\nabla(\mathrm{r}^\nabla\,\varphi) + 2\,\mathrm{r}^\nabla\,\nabla\varphi]$$

atd. Projekce π je samozřejmě vždy z odpovídajícího tenzorového součinu na jeho ireducibilní komponentu, $E \otimes T^* \otimes T^* \to F$ v případě řádu 2 apod. Konstrukce výrazů v hranatých závorkách, tzv. ricciovsky opravených derivací lze nalézt v práci [**CDS00**] spolu se soupisem pro několik dalších řádů.

Operátory $\mathcal{D}^k : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ a $\tilde{\mathcal{D}}^k : C^\infty(M, F^*) \to C^\infty(M, E^*)$ se nazývají adjungovanými, pokud pro všechny řezy ψ, φ s kompaktním nosičem platí

$$\int_M \langle \mathcal{D}^k\varphi, \psi\rangle = \int_M \langle \varphi, \tilde{\mathcal{D}}^k\psi\rangle.$$

Jedním ze způsobů, jak dokázat adjungovanost dvou operátorů, je zkonstruovat bilineární diferenciální párování

$$X_{\mathcal{D}}^{k-1} : C^\infty(M, E) \times C^\infty(M, F^*) \to C^\infty(M, TM)$$

řádu $k-1$, pro nějž by platila divergenční formule

$$\operatorname{div}(X_{\mathcal{D}}^{k-1}(\varphi, \psi)) = \langle \mathcal{D}^k\varphi, \psi\rangle - \langle \varphi, \tilde{\mathcal{D}}^k\psi\rangle,$$

protože pak je rovnost obou integrálů důsledkem Gaussovy věty.

Podobně jako v elektromagnetizmu chceme, aby operátory $\mathcal{D}_i^k$ a $-\tilde{\mathcal{D}}_i^k$ byly adjungované. To znamená nalézt u každé teorie pro $i = 0, 1, 2, 3$ diferenciální párování

$$\lrcorner_H^{k-1} : C^\infty(M, H_i) \times C^\infty(M, H^{i+1}) \to C^\infty(M, TM)$$

splňující Leibnizovu formuli

$$\operatorname{div}(\varphi \lrcorner_H^{k-1} \psi) = \langle \mathcal{D}_i^k \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \tilde{\mathcal{D}}_i^k \psi \rangle$$

Tím však výčet fyzikálně požadovaných párování nekončí. Existují-li zobrazení

$$\lrcorner_H : C^\infty(M, H_0) \times C^\infty(M, H^2) \to C^\infty(M, \Lambda^2 TM)$$

$$\lrcorner_H : C^\infty(M, H_1) \times C^\infty(M, H^2) \to C^\infty(M, TM)$$

$$\lrcorner_H : C^\infty(M, H_0) \times C^\infty(M, H^1) \to C^\infty(M, TM)$$

vyhovující Leibnizovu pravidlu

$$\operatorname{div}(f \lrcorner_H G) = (\mathcal{D}_0 f) \lrcorner_H G + f \lrcorner_H (\tilde{\mathcal{D}}_1 G), \tag{3}$$

můžeme, pokud $q \in \operatorname{Ker} \mathcal{D}_0$, definovat bivektor $q \lrcorner_H G$ s divergencí rovnou $q \lrcorner_H j$, kde $j = \tilde{\mathcal{D}}_1 G$. Označme $\mathbb{W} := \operatorname{Ker} \mathcal{D}_0$, protože se jedná o jádro konformě invariantního operátoru, musí to být reprezentace konformní grupy. Integrál $\int_S *(\cdot \lrcorner_H G)$ lze potom chápat jako prvek $\mathbb{W}^*$ či pomocí invariantního skalárního součinu na $\mathbb{W}$ jako prvek $\mathbb{W}$. Podobnost s integrálem (2) nás vede k tomu považovat $\mathbb{W}$ za prostor nábojů dané teorie, nebo též její *prostor twistorů*, a nazývat $\mathcal{D}_0$ *twistorovým operátorem*. Zavedení stejného označení jako pro modul, jímž je twistovaná de Rhamova posloupnost, není náhodné, jak bude vidět v kapitole 4, je to skutečně tentýž modul. V teorii elektromagnetizmu je tedy prostorem nábojů množina reálných čísel.

Párování

$$\wedge_H : C^\infty(M, H_0) \times C^\infty(M, H_0) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$\wedge_H : C^\infty(M, H_1) \times C^\infty(M, H_0) \to C^\infty(M, T^*M)$$

a Leibnizovo pravidlo

$$d(f \wedge_H g) = (\mathcal{D}_0 f) \wedge_H g + f \wedge_H (\mathcal{D}_0 g)$$

zase slouží ke konstrukci zdrojů odpovídajících historiím nabitých částic. V případě elektromagnetizmu tím máme na mysli světočáru $c : \mathbb{R} \to M, t \to c(t)$ částice s nábojem $q \in \mathbb{R}$, které je přiřazena distribuce $j \in D(M, TM)$

$$\langle\!\langle j, \alpha \rangle\!\rangle := \int_{\mathbb{R}} q\alpha(\dot{c}) \tag{4}$$

s nulovou divergencí (neboli $\langle\!\langle j, df \rangle\!\rangle = 0$), kde f, α jsou testovací funkce a forma. V obecné lineární teorii pole nám párování umožňují twistoru $q \in W$ a světočáře přiřadit distributivní zdroj $j \in D(M, H^1)$, $\langle\!\langle j, \alpha \rangle\!\rangle := \int_{\mathbb{R}} (q \wedge_H \alpha)(\dot{c})$, který se zachovává:

$$\langle\!\langle \operatorname{div} j, f \rangle\!\rangle \equiv \langle\!\langle j, \mathcal{D}_0 f \rangle\!\rangle = \int_{\mathbb{R}} d(q \wedge_H f)(\dot{c}) - \int_{\mathbb{R}} ((\mathcal{D}_0 q) \wedge_H f)(\dot{c}) = 0 - 0 = 0$$

První integrál je nula, protože testovací funkce má v nekonečnech nulovou limitu.

Konstrukce pohybových rovnic je založena na párování

$$\wedge_H : C^\infty(M, H_0) \times C^\infty(M, H_2) \to C^\infty(M, \Lambda^2 T^* M)$$
$$\wedge_H : C^\infty(M, H_1) \times C^\infty(M, H_2) \to C^\infty(M, \Lambda^3 T^* M)$$
$$\wedge_H : C^\infty(M, H_0) \times C^\infty(M, H_3) \to C^\infty(M, \Lambda^3 T^* M)$$

a Leibnizově formuli

$$d(f \wedge_H F) = (\mathcal{D}_0 f) \wedge_H F + f \wedge_H (\mathcal{D}_2 F),$$

díky nimž je na pravé straně rovnice

$$m \nabla_N N = \sharp((q \wedge_H F)(\cdot, N))$$

uzavřená 2-forma, pokud $\mathcal{D}_0 q = \mathcal{D}_2 F = 0$. Znak $\sharp$ označuje zvyšování indexu pomocí konformní struktury c.

Ještě zmiňme párování, které má nejtěsnější vztah k hlavnímu tématu práce probíranému v kapitole 6. Je jím tzv. zvyšování helicity umožňující konstruovat řešení rovnic obecné lineární teorie z řešení Maxwellových rovnic. To je založeno na Leibnizově pravidle

$$\mathcal{D}_2(f \wedge_H F) = (\mathcal{D}_0 f) \wedge_H F + f \wedge_H (dF),$$

kde $f \in C^\infty(M, H_0)$ je obecný náboj a $F \in C^\infty(M, \Lambda^2 T^* M)$ je elektromagnetické pole. Ve formuli vystupují párování

$$\wedge_H : C^\infty(M, H_0) \times C^\infty(M, \Lambda^2 T^* M) \to C^\infty(M, H_2)$$
$$\wedge_H : C^\infty(M, H_0) \times C^\infty(M, \Lambda^3 T^* M) \to C^\infty(M, H_3)$$
$$\wedge_H : C^\infty(M, H_1) \times C^\infty(M, \Lambda^2 T^* M) \to C^\infty(M, H_3).$$

Pokud tedy $\mathcal{D}_0 f = 0$ a F řeší Maxwellovy rovnice $dF = 0$, pak $F' := f \lrcorner_H F$ je řešením jejich analogie $\mathcal{D}_2 F' = 0$. Tomuto zvyšování helicity se přidává přívlastek kinematické, neboť se odehrává v rámci kinematické posloupnosti. V kapitole 6 se zabýváme právě jím. Lze definovat i dynamické zvyšování helicity, kdy nábojem $f \in \operatorname{Ker} \mathcal{D}_0$ transformujeme dynamické elektromagnetické pole $G \in C^\infty(M, \Lambda^2 TM)$ vytvářené zdrojem $j = \operatorname{div} G$ na obecné pole $f \wedge_H G$ generované zdrojem $f \wedge_H j$. Aby vše fungovalo, potřebujeme bilineární diferenciální párování

$$\lrcorner_H : C^\infty(M, H_0) \times C^\infty(M, \Lambda^2 TM) \to C^\infty(M, H^2)$$

$$\lrcorner_H : C^\infty(M, H_0) \times C^\infty(M, TM) \to C^\infty(M, H^1)$$

$$\lrcorner_H : C^\infty(M, H_1) \times C^\infty(M, \Lambda^2 TM) \to C^\infty(M, H^1)$$

s příslušnou Leibnizovou formulí.

3. Příklady – linearizované gravitace

Einsteinova obecná relativita je založena na následujícím schématu:

$$g \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \Gamma \xrightarrow{\mathcal{D}^1} R,$$

neboli (pseudo)Riemannova metrika g se zobrazuje operátorem prvního řádu na afinní konexi Γ, ta opět operátorem prvního řádu na křivost R. Pohybová rovnice je pak hrubě řečeno $R = T$, kde T je tenzor energie-hybnosti. Ve 20.letech navrhl Bach obdobné schéma, které ovšem záviselo pouze na konformní struktuře:

$$\mathsf{c} \xrightarrow{\mathcal{D}^2} W \xrightarrow{\mathcal{D}^2} B,$$

Konformní struktura c se zobrazuje operátorem druhého řádu na Weylův tenzor křivosti a ten opět operátorem druhého řádu na Bachův tenzor B. Pohybová rovnice je $B = T$ a je to nelineární rovnice čtvrtého řádu pro konformní strukturu.

Linearizace Bachovy teorie má kinematickou posloupnost

$$C(T) \xrightarrow{\mathcal{D}_0^1} C(L^2 \operatorname{Sym}_0^2 T^*) \xrightarrow{\mathcal{D}_1^2} C(\Lambda^2 T^* \odot \mathfrak{so}(T)) \xrightarrow{\mathcal{D}_2^2} C(\Lambda^3 T^* \odot T^*) \xrightarrow{\mathcal{D}_3^1} C(L^{-4} T^*)$$

přičemž zjednodušujeme zápis $C(T) \equiv C^\infty(M, TM)$ a zavádíme jednorozměrné bandly hustot L^w, jejichž prvky mají konformní váhu w a umožňují tak rozlišit veličiny se stejnými transformačními vlastnostmi vůči Lorentzově grupě, ale různým škálováním při dilatacích. Například konformní struktura c je vlastně skalární součin na bandlu $T^0 := L^{-1} \otimes TM$, jehož konformní váha je nula. Prostor twistorů linearizované Bachovy teorie je $\Lambda^2 \hat{V}$, kde $\hat{V} = L^1 \oplus V^0 \oplus L^{-1}$ a lze jej též interpretovat jako prostor konformních Killingových vektorových polí, tedy těch $X \in C(T)$, která zachovávají konformní strukturu $\mathcal{L}_X \mathsf{c} = 0$. Operátor prvního řádu $\mathcal{D}_0^1 = \frac{1}{2}\mathcal{L}\mathsf{c}$ je twistorovým operátorem Bachovy teorie. Další dva operátory jsou druhého řádu a odpovídají linearizaci Weylova tenzoru a konformním Bianchiho identitám. Linearizovaná Bachova teorie je tudíž vlastně totéž co linearizovaná konformní geometrie.

Párování obecně definovaná v předchozí sekci lze v Bachově teorii dostat buď výpočtem z obecné teorie podrobně rozvinuté v kapitole 4, nebo ze speciálnějších tvrzení platných v konformní geometrii, která podobně jako u unárních operátorů $\mathcal{D}$ specifikují, jak mohou vypadat diferenciální párování několika nízkých řádů. Například typická párování prvního řádu $C(E_1) \times C(E_2) \to C(F)$ mají tvar

$$\varphi \vee \psi = c_1 \pi[(\nabla\varphi) \otimes \psi] + c_2 \pi[\varphi \otimes (\nabla\psi)],$$

kde c_1, c_2 jsou čísla spočitatelná z reprezentačního typu bandlů E_1, E_2 a F a π je nějaká projekce $T^* \otimes E_1 \otimes E_2 \to F$. V Bachově teorii je párování prvního řádu potřeba k důkazu adjungovanosti operátorů $\mathcal{D}_1^2$ a $\tilde{\mathcal{D}}_1^2$, zatímco u twistorového operátoru $\mathcal{D}_0^1$ postačuje tenzorové párování. Párování, díky nimž lze reprezentovat náboj (neboli gravitační hmotu) pomocí dynamického pole na sféře, jsou prvního řádu, stejně jako párování v pohybových rovnicích, zatímco přiřazení distributivního zdroje k nabité světočáře vyžaduje netriviální párování druhého řádu. Zvyšování helicity je naproti tomu tenzorové.

Penroseova linearizovaná gravitace je určena kinematickou posloupností začínající

$$C(L^1\Lambda^2 T^0) \xrightarrow{\mathcal{D}_0^1} C(L^1 T^* \odot \Lambda^2 T^0) \xrightarrow{\mathcal{D}_1^1} \Lambda^2 T^*(L^1 \Lambda^2 T^* \odot \Lambda^2 T^0) \xrightarrow{\mathcal{D}_2^1} \dots$$

V Penroseově abstraktně indexové notaci ji můžeme přepsat[2] jako

$$\mathfrak{S}_{(AB)} \longrightarrow \mathfrak{S}_{(ABC)A'} \longrightarrow \mathfrak{S}_{(ABCD)} \longrightarrow \dots$$

V abstraktně indexové notaci indexy pouze vyznačují reprezentační typ veličiny. V dimenzi 4 jsou všechny reprezentace obsaženy v tenzorových součinech dvou

[2]Reprezentace $\Lambda^2 T^0$ je reducibilní, zatímco $\mathfrak{S}_{(AB)}$ ireducibilní, a stejně v ostatních homogenitách, takže náš přepis do abstraktních indexů není zcela přesný. Vybíráme fyzikálně relevantní část.

spinorových reprezentací S^+ a S^-, jimž se přiřazují indexy psané velkými písmeny, čárkované resp. nečárkované. Je tedy možné libovolný tenzor zapsat pomocí spinorových veličin, což často přináší nový pohled na vztahy, v nichž vystupuje, nebo jejich zjednodušení. Například informaci nesenou Riemannovým tenzorem křivosti R_{abcd} je možné zakódovat do dvou spinorů Ξ_{ABCD} a $\Phi_{ABC'D'}$ a v případě absence hmoty dokonce do jediného spinoru $\Psi_{ABCD} = \Xi_{(ABCD)}$. Bianchiho identita se transformuje na jednoduchý vztah $\nabla^{AA'}\Psi_{(ABCD)} = 0$, jenž bývá nazýván rovnicí pro nehmotné pole. Přísně vzato se o pohybovou rovnici nejedná, nicméně právě tento vztah je základem Penroseova přístupu k linearizované gravitaci. Jedním z důvodů je, že bezezdrojové Maxwellovy rovnice $dF = *d * F = 0$ lze přepsat velmi analogicky jako $\nabla^{AA'}\psi_{(AB)} = 0$.

Protože i zde je operátor $\mathcal{D}^1_2 : \Psi_{(ABCD)} \to \nabla^{AA'}\Psi_{(ABCD)}$ součástí kinematické posloupnosti, vyplatí se zkoumat, jaký je význam ostatních operátorů a párování v souvislosti s linearizovanou gravitací. Twistorový operátor $\mathcal{D}^1_0$ Penroseovy teorie je definován jako $\sigma^{(BC)} \to \nabla^{(A}{}_{A'}\sigma^{BC)}$, což je mimochodem způsob, jakým byl pojem twistorového operátoru původně Penrosem zaveden. Jeho jádro lze zapsat jako jednu ze dvou ireducibilních desetirozměrných komponent modulu $\Lambda^3\hat{V}$. Tenzorové párování $\chi_{AB} = \Psi_{ABCD}\sigma^{CD}$ dává ke každému řešení Einsteinových rovnic a ke každému řešení twistorové rovnice $\nabla^{(A}{}_{A'}\sigma^{BC)} = 0$ řešení Maxwellových rovnic $\nabla^{AA'}\chi_{AB} = 0$. Někdy se proto hovoří o snižování helicity, protože se na toto párování lze dívat jako na konstrukci řešení elektromagnetického problému (helicita 1) z řešení rovnice popisující linearizovanou gravitaci (helicita 2). Veličině χ_{AB} ale také odpovídá uzavřená 2-forma F, $dF = 0$, a párování je tím, jehož vlastnosti a interpretaci jsme popsali obecně vztahem (3) a související diskuzí. V situaci, kdy studujeme nějaké rozložení hmoty lokalizované uvnitř sféry S, máme díky tomuto párování pro každé z deseti nezávislých řešení twistorové rovnice jednu zachovávající se veličinu. Ty odpovídají deseti komponentám symetrického tenzoru energie-hybnosti T_{ab}, čili čtyřem složkám čtyřimpulsu a šesti složkám čtyřimpulsmomentu.

KAPITOLA 2

Základy teorie reprezentací

1. Přehled nejdůležitějších pojmů

Nejprve zopakujme několik základních pojmů a výsledků z teorie reprezentací Lieových grup a algeber. Pro podrobnější informace odkazujeme zejména na knihy [**Hu72, FH99**] nebo učební texty [**So00, Sl96**].

Lieova grupa G je diferencovatelná varieta, na níž je zavedena struktura grupy taková, že grupové násobení a inverze jsou C^∞-zobrazení. Její tečný prostor v jednotce $\mathfrak{g} \equiv T_eG$ se nazývá *Lieova algebra.* Je v ní definována antisymetrická bilineární operace *Lieovy závorky* $X, Y \to [X, Y]$. Konečně rozměrnou komplexní *reprezentací* Lieovy grupy resp. algebry míníme její homomorfizmus do prostoru automorfizmů resp. endomorfizmů komplexního vektorového prostoru V konečné dimenze, tedy do $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ resp. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \equiv \mathrm{M}(n, \mathbb{C})$. Je-li G jednoduše souvislá, pak ke každé reprezentaci φ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ existuje právě jedna reprezentace G, jejíž tečné zobrazení v okolí jednotky je φ. Lze tedy získat všechny reprezentace jednoduše souvislé Lieovy grupy pouze studiem reprezentací její Lieovy algebry.

Lieově algebře $\mathfrak{g}$ lze přiřadit tzv. *derivovanou posloupnost* podalgeber $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$. Pokud pro nějaké k je $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$, pak se algebra nazývá *řešitelnou.* Podobně pokud tzv. *dolní centrální posloupnost* $\mathfrak{g}_{(k)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(k-1)}]$ končí nulami, je $\mathfrak{g}$ *nilpotentní.* Jednoznačně určený maximální řešitelný ideál $\mathfrak{r}$ v $\mathfrak{g}$ se nazývá *radikál.* Je-li radikál nulový, nazývá se $\mathfrak{g}$ *polojednoduchá.* V každé Lieově algebře lze nalézt polojednoduchou podalgebru $\mathfrak{l}$ izomorfní $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ zvanou *Leviho faktor.* Lieova algebra, která nemá žádné netriviální ideály, se nazývá *jednoduchá.* Polojednoduchá Lieova algebra je přímým součtem jednoduchých.

Význačnou reprezentací Lieovy algebry je *adjungovaná reprezentace.* Vektorovým prostorem je zde sama $\mathfrak{g}$ a prvek $X \in \mathfrak{g}$ je reprezentován endomorfizmem $\mathrm{ad}(X)(Y) := [X, Y]$. *Cartanova-Killingova forma* je bilineární forma $B(X, Y) \equiv (X, Y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X\, \mathrm{ad}\, Y)$. Je symetrická, invariantní vůči automorfizmům $\mathfrak{g}$ a pro libovolná $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ platí $B(X, [Y, Z]) = B([X, Y], Z)$. Lieova algebra je polojednoduchá právě když je Cartanova-Killingova forma nedegenerovaná.

Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{h}$ polojednoduché Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ rozumíme některou z maximálních komutativních podalgeber. Pokud $\rho : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ je reprezentace, lze najít společné vlastní vektory akcí $\rho(H)$, $H \in \mathfrak{h}$ na V. Příslušné vlastní hodnoty definují předpisem $\rho(H)(v) = \lambda(H)v$ na $\mathfrak{h}$ lineární formu λ, která se nazývá *vahou*. Váhy adjungované reprezentace se nazývají *kořeny*, jejich množinu značíme Δ. Algebra $\mathfrak{g}$ je přímým součtem $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$, kde $\mathfrak{g}_\alpha$ jsou *kořenové podprostory* v $\mathfrak{g}$. Každé $\mathfrak{g}_\alpha$ má dimenzi 1 a $\mathfrak{s}_\alpha := \mathfrak{g}_\alpha \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ je třídimenzionální podalgebra $\mathfrak{g}$ izomorfní $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, algebře matic 2×2 s nulovou stopou. Existuje právě jeden prvek $T_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$, že $\forall H \in \mathfrak{h}$ je $B(T_\alpha, H) = \alpha(H)$. Na $\mathfrak{h}^*$ je pak definován skalární součin vztahem $(\alpha, \beta) = B(T_\alpha, T_\beta)$, který je pozitivně definitní na reálném lineárním obalu Δ.

TVRZENÍ 1. *Množina vektorů Δ je množinou kořenů polojednoduché Lieovy algebry, právě když splňuje následující vlastnosti:*

1. *Pro $\alpha, \beta \in \Delta$ je $\langle \beta, \alpha \rangle = 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ celé číslo.*
2. *Pro všechna $\alpha, \beta \in \Delta$ je také $\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \Delta$.*
3. *Pokud $\alpha, t\alpha \in \Delta$, pak $t = \pm 1$.*

Matice $a_{\beta\alpha} = \langle \beta, \alpha \rangle$ se nazývá *Cartanova matice*. Možné typy Cartanových matic je obvyklé vizualizovat pomocí *Dynkinových diagramů*. Kořeny jsou reprezentovány uzly Dynkinova diagramu a počet čar mezi nimi je určen číslem $a_{\alpha\beta} a_{\beta\alpha}$. Vyskytují se pouze hodnoty $0, 1, 2$ a 3. Jednoduché algebry mají souvislý Dynkinův diagram.

Kořeny v polojednoduché algebře lze pomocí libovolné lineární formy na $\mathfrak{h}^*$, která není nulová na žádném kořenu, rozdělit na *kladné* a *záporné*, značíme Δ^+, Δ^-. Navíc lze najít takovou bázi $\mathfrak{h}^*$, jejíž kořeny jsou kladné a všechny ostatní kladné kořeny se dostanou jako lineární kombinace s kladnými celočíselnými koeficienty. Takové kořeny α_i nazýváme *jednoduchými* a jejich množinu značíme Δ_0. Prvkům $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$, které splňují $\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$, říkáme *fundamentální váhy*. Váhy každé reprezentace polojednoduché Lieovy algebry jsou jednoznačnými celočíselnými lineárními kombinacemi fundamentálních vah. Váha $\delta = \sum_i \lambda_i$, která je součtem fundamentálních vah, je zároveň i polovinou součtu kladných kořenů. Pokud $V_\lambda \subset V$ je podprostor reprezentace sestávající z vektorů s vahou λ, pak $\rho(\mathfrak{h})V_\lambda \subset V_\lambda$ a

$\rho(\mathfrak{g}_\alpha)V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$. Zvolíme-li nějakou bázi $\mathfrak{h}$, pak lze váhy popsat také souřadnicemi vzhledem k duální bázi. Pokud tuto bázi zobrazíme na standardní ortonormální bázi aritmetického vektorového prostoru, vytváří celočíselný lineární obal fundamentálních vah v tomto prostoru *váhovou mřížku* Λ. Váhy se všemi koeficienty u fundamentálních vah nezápornými se nazývají *dominantní* a se všemi kladnými *silně dominantní*. Množina dominantních vah se nazývá *Weylova komora*. *Stěny Weylovy komory* jsou průnikem Weylovy komory a nadroviny vektorů, které mají nulový koeficient u některé fundamentální váhy a ekvivalentně které jsou kolmé na některý jednoduchý kořen. Je-li λ váha, pak $\sigma_\alpha(\lambda) \equiv \lambda - \langle\lambda, \alpha\rangle\alpha$, kde α je jednoduchý kořen, je také váha a příslušná operace je reflexí podle nadroviny na tento kořen kolmé. Podgrupa grupy ortonormálních transformací generovaná všemi reflexemi se nazývá *Weylova grupa* W. Orbita libovolné váhy λ vůči Weylově grupě má jednoprvkový průnik s Weylovou komorou, který značíme $\{\lambda\}$. Pro váhu λ existuje $w \in W$, pro nějž $w(\lambda) = \lambda$, právě když $\{\lambda\}$ není silně dominantní. Každá váha je vahou reprezentace právě tehdy, jsou-li všechny prvky její orbity. Dimenze váhového prostoru (*multiplicita váhy*) V_λ je pro všechny prvky orbity stejná.

Na vahách lze zavést částečné uspořádání, v němž je $\lambda \prec \lambda'$ právě když $\lambda' - \lambda$ je lineární kombinace jednoduchých kořenů s kladnými celočíselnými koeficienty. Pokud λ není dominantní, pak $\lambda \prec \{\lambda\}$. Každá ireducibilní reprezentace je jednoznačně zadaná svou nejvyšší vahou, která je tudíž nutně dominantní, a tedy ireducibilní reprezentace jsou v 1-1 korespondenci s prvky Weylovy komory. Označíme-li v_μ vektor nejvyšší váhy ireducibilní reprezentace Γ_μ, pak všechny ostatní váhové vektory lze získat jako $\mathfrak{g}_{-\alpha_{i1}}\mathfrak{g}_{-\alpha_{i2}}\dots\mathfrak{g}_{-\alpha_{is}}v_\mu$, kde α_{ij} jsou jednoduché kořeny, které nemusejí být vesměs různé. Je tedy možné nalézt všechny váhy dané reprezentace tak, že nejprve určíme všechny $\mu - \sum_i c_i\alpha_i$, $c_i \in \mathbb{N}_0$, které jsou dominantní, a pak na ně necháme působit reflexe podle jednoduchých kořenů. Ireducibilní reprezentace se často značí vypsáním koeficientů v rozvoji nejvyšší váhy do fundamentálních vah nad uzly Dynkinova diagramu příslušně odpovídajícím jednoduchým kořenům.

Váhové mříži Λ můžeme asociovat volný $\mathbb{Z}$-modul $Z[\Lambda]$, neboli množinu formálních $\mathbb{Z}$-lineárních kombinací bázových prvků x^λ, $\lambda \in \Lambda$. Navíc definujeme na $Z[\Lambda]$ násobení vztahem $x^\lambda x^\mu = x^{\lambda+\mu}$ a akci Weylovy grupy $\sigma(x^\lambda) = x^{\sigma(\lambda)}$. Prvek $\sum c_\lambda x^\lambda \in Z[\Lambda]$ nazýváme *formálním charakterem*. Libovolné reprezentaci můžeme přiřadit charakter $ch_\lambda = \sum m_\lambda x^\lambda$, kde $m_\lambda = \dim V_\lambda$. Charakter tenzorového součinu reprezentací se spočte jako součin charakterů činitelů. Pojem charakteru je nástrojem při hledání formulí a algoritmů pro výpočet multiplicit vah reprezentací a jejich dimenze a pro hledání rozkladu tenzorového součinu na ireducibilní reprezentace.

VĚTA 1.1 (Weylova formule pro dimenze). *Dimenze ireducibilní reprezentace* Γ_λ *je*

$$\dim \Gamma_\lambda = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{\langle \lambda + \delta, \alpha \rangle}{\langle \delta, \alpha \rangle} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{(\lambda + \delta, \alpha)}{(\delta, \alpha)}$$

VĚTA 1.2 (Klimykova formule). *Jsou-li* λ', λ'' *váhy, pak platí*

$$ch_{\lambda' \otimes \lambda''} = \sum_{\lambda \in \Pi(\lambda')} m_{\lambda'}(\lambda) t(\lambda + \lambda'' + \delta) ch_{\{\lambda + \lambda'' + \delta\} - \delta}.$$

$ch_{\lambda' \otimes \lambda''}$ *je charakterem tenzorového součinu* $\Gamma_{\lambda'} \otimes \Gamma_{\lambda''}$, $\Pi(\lambda')$ *je množina všech vah reprezentace* $\Gamma_{\lambda'}$ *a* $m_{\lambda'}(\lambda)$ *multiplicita váhy* λ *v* $\Gamma_{\lambda'}$. *Funkce* $t(\mu)$ *je rovna nule, pokud existuje prvek Weylovy grupy fixující* μ *a rovná se* 1 *resp.* -1, *pokud je prvek* σ *Weylovy grupy, pro nějž je* $\sigma(\mu)$ *dominantní váha, součinem sudého resp. lichého počtu reflexí podle jednoduchých kořenů.*

2. Algebry $\mathfrak{so}(2k, \mathbb{C})$

Grupa $SO(2k, \mathbb{C})$[1] je množinou všech automorfizmů komplexního vektorového prostoru V dimenze $2k$, které zachovávají skalární součin g a mají jednotkový determinant. Uvažujeme-li $SO(2k)$ jako komplexní Lieovu grupu, nemusíme se starat o to, o jaký skalární součin se přesně jedná, neboť pro každou regulární matici Q_{ij} lze najít bázi $\{e_i\}_1^{2k} \subset V$, v níž $g(e_i, e_j) = Q_{ij}$. Standardní bývá volit za Q_{ij} buďto jednotkovou matici E_{2k}, nebo matici tvaru

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ E_k & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Prvky $SO(2k, \mathbb{C})$ jsou pak matice A splňující $AQA^T = Q$, $\det A = 1$ a algebra $\mathfrak{so}(2k, \mathbb{C})$ je prostorem všech matic a, pro které platí $aQ + Qa^T = 0$, $\operatorname{Tr} a = 0$. První podmínka znamená při $Q = E_{2k}$ antisymetrii matice a, tvar (5) je ale pro hledání kořenů výhodnější. Píšeme-li a v blokově diagonální formě

$$a = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

[1] $SO(2k)$ ovšem není jednoduše souvislá, $\pi_1(SO(2k)) = \mathbb{Z}_2$. Jejím univerzálním nakrytím je grupa $\mathrm{Spin}(2k)$, kterou později podrobně zkonstruujeme pomocí Cliffordových algeber.

pak $a \in \mathrm{SO}(2k,\mathbb{C})$ právě když B a C jsou antisymetrické a $A = -D^T$.

Podalgebra diagonálních matic je jistě množinou vzájemně komutujících operátorů, je tedy možné vůči ní a adjungované akci algebru diagonalizovat. Označme ji $\mathfrak{h}$ a zvolme její bázi $H_i = E_{i,i} - E_{k+i,k+i}$, kde $E_{i,j}$ je matice s jednotkou na pozici i,j a nulami jinde. Prvky duální báze označíme L_i, $L_i(H_j) = \delta_{ij}$. Společné vlastní vektory endomorfizmů ad H_i jsou

$$X_{i,j} = E_{i,j} - E_{k+j,k+i}$$
$$Y_{i,j} = E_{i,k+j} - E_{j,k+i}$$
$$Z_{i,j} = E_{k+i,j} - E_{k+j,i}$$

a odpovídající lineární formy $L_i - L_j, L_i + L_j$ a $-L_i - L_j$, $i \neq j$. Tím jsme vyčerpali celou algebru a protože všechny vlastní vektory $X_{i,j}, Y_{i,j}$ i $Z_{i,j}$ mají různé a nenulové vlastní hodnoty, je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra a $\pm L_i \pm L_j$ jsou kořeny. Za kladné kořeny zvolíme $L_i + L_j$ a $L_i - L_j$, $i < j$ a jednoduché kořeny jsou pak $L_i - L_{i+1}$, $1 \leq i \leq k-1$ a $L_{k-1} + L_k$.

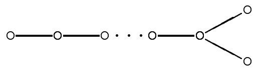
Cartanova-Killingova forma je na bázi $\mathfrak{h}$ rovna

$$B(H_i, H_j) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(H_i)\,\mathrm{ad}(H_j)) = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(H_i)\alpha(H_j).$$

Pokud $i \neq j$, jediné nenulové sčítance vzejdou z kořenů $L_i + L_j$, $L_i - L_j$, $-L_i + L_j$ a $-L_i - L_j$ a budou to po řadě $1, -1, -1$ a 1, tedy $B(H_i, H_j) = c\delta_{ij}$. Pokud $i = j$, přispěje každá sada kořenů $L_s + L_t$,$L_s - L_t$, $-L_s + L_t$ a $-L_s - L_t$, $s < t$ a $s = i$ nebo $t = i$, koeficientem $k-1$, dohromady $c = 4(k-1)$. Z definice Cartanovy-Killingovy formy na $\mathfrak{h}^*$ snadno plyne, že $(L_i, L_j) = \frac{1}{4(k-1)}\delta_{ij}$. Cartanova matice a_{α_i,α_j} je

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 \\
\multicolumn{8}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\
0 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} & 0 & -1 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

a Dynkinův diagram



Fundamentálními vahami jsou L_1, $L_1 + L_2$, $L_1 + L_2 + L_3$, $\ldots$ $L_1 + L_2 + \ldots + L_{k-2}$, $\frac{1}{2}(L_1 + L_2 + \ldots + L_k)$ a $\frac{1}{2}(L_1 + L_2 + \ldots - L_k)$. Budeme je označovat buďto jejich koeficienty v bázi fundamentálních vah, tedy $[1, 0, 0, \ldots, 0]$, $[0, 1, 0, \ldots, 0]$, atd. nebo jejich souřadnicemi, tj. $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2})$. Weylova komora je tvořena všemi $a_1 L_1 + \ldots + a_k L_k$, pro něž $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{k-1} \geq |a_k|$, přičemž a_i jsou buď všechna celá nebo polocelá. Váha δ má souřadnice $(k-1, k-2, \ldots, 1, 0)$. Reflexe váhy $a_1 L_1 + a_2 L_2 + \ldots + a_k L_k$ podle kořene $L_i - L_{i+1}$ se projeví prohozením koeficientů a_i a a_{i-1} a podle $L_{k-1} + L_k$ nahrazením $a_{k-1} \to -a_k$, $a_k \to -a_{k-1}$. Weylova grupa je tedy polopřímým součinem grupy permutací a $\mathbb{Z}_2^{k-1}$ a obsahuje všechny změny pořadí a znamének koeficientů, které zachovají součin $a_1 a_2 \ldots a_k$.

Vektorová reprezentace V, v níž jsme vlastně $\mathfrak{so}(2k)$ definovali, má za váhové vektory $e_i = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2k$. a akce $H_l e_i = \delta_{il}$ pokud $i \leq k$ a $H_l e_i = -\delta_{il}$ pokud $i > k$. Vektorová reprezentace má tedy váhy o souřadnicích $(\ldots, \pm 1, \ldots)$ (tečky jsou místo libovolného, i nulového, počtu nul). Z nich nejvyšší je $(1, 0, \ldots, 0)$, první fundamentální váha. Další fundamentální váhy jsou nejvyššími vahami reprezentací $\Lambda^2 V, \ldots, \Lambda^{k-2} V$ a dvou spinorových reprezentací S^+ a S^-, které podrobněji prozkoumáme v sekci o Cliffordových algebrách.

Pokud reprezentujeme prvky $\mathfrak{so}(2k)$ pomocí antisymetrických matic, je zřejmé, že množina prvků s nulovým např. posledním řádkem a sloupcem je podalgebrou typu $\mathfrak{so}(2k-1)$. Je to Lieova algebra podgrupy rotací fixujících poslední souřadnou osu. Všechny reprezentace $\mathfrak{so}(2k)$ jsou samozřejmě také reprezentacemi libovolné podalgebry. nemusí ovšem už být vůči ní ireducibilní. Problém rozkladu na ireducibilní komponenty řeší tato věta:

Věta 2.1 (Větvící pravidla). *Je-li Γ_α reprezentace algebry $\mathfrak{so}(n+1)$ s nejvyšší vahou α, pak se v jejím rozkladu na ireducibilní reprezentace vůči $\mathfrak{so}(n)$ objevují s multiplicitou 1 reprezentace Γ_λ se souřadnicemi λ splňujícími*

$$\alpha_i - \lambda_i \in \mathbb{Z} \wedge \begin{cases} \alpha_1 \geq \lambda_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \lambda_l \geq |\alpha_{l+1}| & n = 2k-1 \\ \alpha_1 \geq \lambda_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \lambda_{l-1} \geq \alpha_l \geq |\lambda_l| & n = 2k \end{cases}$$

a s multiplicitou 0 *všechny ostatní reprezentace.*

Je pravdou, že jsme v této sekci analyzovali pouze případ sudé dimenze a o vahách reprezentací algeber liché dimenze nic nevíme, v lemmatu (2) ale budeme této věty používat dvakrát za sebou, pro větvení z $\mathfrak{so}(2k+2)$ na $\mathfrak{so}(2k)$, reprezentace lichodimenzionálních algeber tam budou pouze nepodstatným meziproduktem.

Pokud uvažujeme $\mathrm{SO}(2k-l,l)$, grupu automorfizmů reálného vektorového prostoru zachovávajících pseudoskalární součin signatury $(2k-l,l)$ a s determinantem jedna, jsou komplexní ireducibilní reprezentace $\mathfrak{so}(2k-l,l)$ v 1-1 korespondenci s reprezentacemi $\mathfrak{so}(2k,\mathbb{C})$. Přechod do oboru reálných čísel tedy stačí zohlednit pouze vzetím vhodné reálné podalgebry $\mathfrak{so}(2k,\mathbb{C})$, reprezentace jsou jen zúžením reprezentací $\mathfrak{so}(2k,\mathbb{C})$ na tuto reálnou podalgebru.

Závěrem poznamenejme, že ačkoli v Cartanově klasifikaci jednoduchých Lieových algeber začíná série $D_k \equiv \mathfrak{so}(2k)$ až k rovným čtyřem, ortogonální grupu a algebru lze definovat pro libovolné k. $\mathfrak{so}(6)$ je ovšem zahrnuta již jako $A_3 = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ a $\mathfrak{so}(4) \simeq A_1 \oplus A_1 = \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ je dokonce pouze polojednoduchá. V obou případech číslujeme kořeny jako by šlo o ortogonální algebru - tedy např. v $\mathfrak{so}(6)$ je kořenem α_0 prostřední, nikoliv některý z krajních uzlů.

3. Cliffordovy algebry

Definice 1 (*Cliffordova algebra*). Nechť V je komplexní vektorový prostor a g kvadratická forma na něm. Faktor tenzorové algebry $T(V) = \mathbb{C} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \ldots$ podle ideálu I generovaného prvky $v \otimes v \ + g(v,v)$ pro všechna $v \in V$ se nazývá Cliffordova algebra, značíme $\mathrm{Cl}(V,g)$.

Jelikož ideál I je tvořen sudými prvky $\mathbb{Z}$-gradované algebry $T(V)$, zdědí $\mathrm{Cl}(V)$ $\mathbb{Z}_2$-gradaci. $\mathbb{Z}_2$-gradovaný modul $E \equiv E^+ \oplus E^-$ nazýváme *Cliffordovým modulem*, pokud existuje homomorfismus $c : \mathrm{Cl}(V) \to \mathrm{End}(E)$, pro nějž $c(v^+)e^\pm \in E^\pm$ a $c(v^-)e^\pm \in E^\mp$.

Definice 2 (*Vnější algebra*). Vnější algebra vektorového prostoru V je faktor $T(V)$ podle ideálu J generovaného prvky tvaru

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_p \ + \ v_1 \otimes \ldots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_p.$$

Značíme ji ΛV.

Vnější algebra je $\mathbb{Z}$-gradovaná a bázi p-té její části $\Lambda^p V$ tvoří prvky e_I, $I \subset \{1, 2, .., n\}$, $|I| = p$, přičemž e_i, $i \in \{1, 2, .., n\}$ je báze V. Vnější součin je na bázi definován vztahem $e_I \wedge e_J = \operatorname{sgn} \pi(I, J) e_{I \cup J}$, kde $\pi(I, J)$ je permutace převádějící posloupnost podle velikosti seřazených prvků množiny $I \cup J$ na posloupnost I, J, kde jsou podle velikosti seřazeny pouze prvky v množinách I a J, ale všechny prvky I jsou před prvky J. Vnější součin je zjevně antisymetrický jakožto zobrazení $V \times V \to \Lambda^2 V$.

Definice 3. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem g. Definujme homomorfismy $\varepsilon, \iota, c : V \to \operatorname{End} \Lambda V$ pro $w = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p$ jako

$$\begin{aligned} \varepsilon(v)w &:= v \wedge w \\ \iota(v)w &:= \sum_{i=1}^{n} (-)^{i-1} g(v, v_i) v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_p \\ c(v)w &:= (\varepsilon(v) - \iota(v))w \end{aligned}$$

Tvrzení 2. *Homomorfizmus $c : V \to \operatorname{End} \Lambda V$ lze rozšířit na celé $\operatorname{Cl}(V)$ a ΛV je Cliffordův modul.*

Důkaz. Algebraickými manipulacemi se postupně ověří, že $\forall u, v \in V$, $\forall w \in \Lambda V$

$$\begin{aligned} (\varepsilon(u)\varepsilon(v) + \varepsilon(v)\varepsilon(u))w &= 0 \\ (\iota(u)\iota(v) + \iota(v)\iota(u))w &= 0 \\ (\iota(u)\varepsilon(v) + \varepsilon(v)\iota(u))w &= g(v, u)w \\ (c(v)c(u) + c(u)c(v))w &= -2g(v, u)w. \end{aligned}$$

Z poslední relace je vidět, že pokud c rozšíříme na tenzorovou algebru vztahem $c(v \otimes u)w := c(v)c(u)w$, je ideál I jádrem homomorfizmu $c : T(V) \to \operatorname{End}(V)$, lze podle I vyfaktorizovat a c je definován prostě na $\operatorname{Cl}(V)$. □

Definice 4. Zobrazení

$$\begin{aligned} \sigma : \operatorname{Cl}(V) &\to \Lambda V & \qquad q : \Lambda V &\to \operatorname{Cl}(V) \\ \alpha &\to c(\alpha) 1_{\Lambda V} & e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} &\to c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_p}, \end{aligned}$$

kde $1_{\Lambda V} \in \Lambda^0 V$ a c_i je prvek $\operatorname{Cl}(V)$ korespondující prvku e_i ortonormální báze V vůči g, nazýváme symbolovým zobrazením resp. kvantovacím[2] zobrazením.

[2]Nemá, pokud vím, přímý fyzikální význam, alespoň ne v kontextu této práce.

LEMMA 1. *Symbolové a kvantovací zobrazení jsou vzájemně inverzní lineární zobrazení vektorových prostorů* $\mathrm{Cl}(V)$ *a* ΛV*, definují tedy jejich izomorfizmus.*

DŮKAZ. Pro každý prvek báze $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \in \Lambda V$ platí

$$\begin{aligned}
\sigma(q(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p})) &= \sigma(c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_p}) \\
&= \sigma(c_{i_1})\sigma(c_{i_2}) \ldots \sigma(c_{i_p}) \\
&= \sigma(c_{i_1})\sigma(c_{i_2}) \ldots \sigma(c_{i_{p-1}}) c(e_{i_p}) 1_{\Lambda V} \\
&= \sigma(c_{i_1})\sigma(c_{i_2}) \ldots \sigma(c_{i_{p-1}}) \left(\varepsilon(e_{i_p}) 1_{\Lambda V} - \iota(e_{i_p}) 1_{\Lambda V}\right) \\
&= \sigma(c_{i_1})\sigma(c_{i_2}) \ldots \sigma(c_{i_{p-1}}) e_{i_p} \\
&= \sigma(c_{i_1})\sigma(c_{i_2}) \ldots \sigma(c_{i_{p-2}}) \left(\varepsilon(e_{i_{p-1}}) e_{i_p} - \iota(e_{i_{p-1}}) e_{i_p}\right) \\
&= \sigma(c_{i_1})\sigma(c_{i_2}) \ldots \sigma(c_{i_{p-2}}) e_{i_{p-1}} \wedge e_{i_p} \\
&= \ldots = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}.
\end{aligned}$$

□

Jako jednoduchý důsledek lemmatu vidíme, že dimenze $\mathrm{Cl}(V)$ je stejná jako dimenze ΛV, tedy 2^n.

VĚTA 3.1. *Nechť* $a \in q(\Lambda^2 V) \equiv \mathrm{Cl}^2(V)$*, pak* $\forall v \in V$ *je* $[a, v] \equiv av - va \in V$*. Zobrazení*

$$\begin{aligned}
\tau : \mathrm{Cl}^2(V) &\to \mathrm{End}(V) \\
a &\to (v \to [a, v])
\end{aligned}$$

je izomorfizmus Lieových algeber $(\mathrm{Cl}^2(V), [,])$ *a* $\mathfrak{so}(V)$*.*

DŮKAZ. Akce bázového elementu $e_i e_j \in \mathrm{Cl}^2(V)$ na bázový element $e_a \in V$ je

$$[e_i e_j, e_a] = 2(\delta_{ia} e_j - \delta_{ja} e_i),$$

tedy stejná jako akce antisymetrické matice $(A^{ij})_{ba} = 2(\delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ja}\delta_{ib})$. Definujeme-li τ jako lineární rozšíření takto definovaného vzájemně jednoznačného zobrazení bází $\mathrm{Cl}^2(V)$ a $\mathfrak{so}(V)$, zbývá ověřit, že tato definice respektuje Lieovu závorku:

$$\begin{aligned}
[e_ie_j, e_ke_l] &= e_ie_je_ke_l - e_ke_le_ie_j \\
&= [e_ie_j, e_k]e_l + e_k[e_ie_j, e_l] \\
&= 2(\delta_{ik}e_je_l - \delta_{jk}e_ie_l + \delta_{il}e_ke_j - \delta_{jl}e_ke_i) \\
[A^{ij}, A^{kl}] &= (A^{ij})_{ab}(A^{kl})_{bc} - (A^{lk})_{ab}(A^{kl})_{bc} \\
&= 4(\delta_{ib}\delta_{ja} - \delta_{ia}\delta_{jb})(\delta_{kc}\delta_{lb} - \delta_{kb}\delta_{lc}) - 4(\delta_{kb}\delta_{la} - \delta_{lb}\delta_{ka})(\delta_{ic}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{jc}) \\
&= 4\delta_{il}(\delta_{ja}\delta_{kc} - \delta_{ka}\delta_{jc}) + 4\delta_{ik}(\delta_{la}\delta_{jc} - \delta_{ja}\delta_{lc}) \\
&\quad - 4\delta_{jk}(\delta_{la}\delta_{ic} - \delta_{ia}\delta_{lc}) - 4\delta_{jl}(\delta_{ia}\delta_{kc} - \delta_{ka}\delta_{ic}) \\
&= 2\delta_{ik}(A^{jl})_{ac} - 2\delta_{jk}(A^{il})_{ac} + 2\delta_{il}(A^{kj})_{ac} - 2\delta_{jl}(A^{ki})_{ac}
\end{aligned}$$

□

Předpokládejme nyní, že dimenze V je sudá, rovna $2k$. Nechť $\{\tilde{e}_i\}$ je ortonormální báze V a

$$\begin{aligned}
w_i &= \frac{1}{2}[\tilde{e}_{2i-1} + i\tilde{e}_{2i}] \\
\bar{w}_i &= -\frac{1}{2}[\tilde{e}_{2i-1} - i\tilde{e}_{2i}]
\end{aligned}$$

jsou izotropické ($g(w_i, w_i) = g(\bar{w}_i, \bar{w}_i) = 0$) vektory. Platí pro ně antikomutační relace

$$\begin{aligned}
\{w_i, w_j\} = \{\bar{w}_i, \bar{w}_j\} &= 0 \\
\{w_i, \bar{w}_j\} &= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

a definují direktní rozklad $V = W \oplus W'$.

Definice 5 (Spinorová reprezentace). Označme $I = \bar{w}_1 w_1 \bar{w}_2 w_2 \dots \bar{w}_k w_k$. Prvek I je idempotentní $I^2 = I$ a projekce $\pi : \mathrm{Cl}(V) \to \mathrm{Cl}(V)I$ definovaná $w \to wI$ je spinorovou reprezentací $\mathrm{Cl}(V)$, kterou značíme S.

Tvrzení 3. *$S \simeq \Lambda(W)I$ jako vektorové prostory a centrem $\mathrm{Cl}(V)$ je prostor skalárů $\mathbb{C}$.*

Důkaz. Bázové elementy S lze psát $w_J I$, kde w_J je součin $w_{j_1} w_{j_2} \dots w_{j_p}$, $j_1 \dots j_p$ jsou prvky J v pořadí od nejmenšího k největšímu, neboť díky antikomutačním relacím platí

$$w_i w_J I \;=\begin{cases}\pm w_{i\cup J} I & i\notin J\\ 0 & i\in J\end{cases}\qquad \bar{w}_i w_J I=\begin{cases}0 & i\notin J\\ \pm w_{J\setminus\{i\}} I & i\in J,\end{cases}$$

Tedy $w_J I$ generují S a lineární nezávislost lze ukázat indukcí: množina obsahující jeden vektor je z definice lineárně nezávislá, předpokládejme, že každá p-prvková množina bázových vektorů je lineárně nezávislá. Nechť existují $J_1, \dots, J_{p+1}$ vesměs různé množiny indexů takové, že $a_1 w_{J_1} I \;+ \ldots + a_{p+1} w_{J_{p+1}} I \;= 0$. Jelikož J_1 a J_2 jsou různé, existuje $i \in J_1 \setminus J_2$ nebo $i \in J_2 \setminus J_1$. Pak ale $\bar{w}_i w_{J_2} I \;= 0$ a $\bar{w}_i w_{J_1} I \;\neq 0$ resp. naopak a zapůsobením na obě strany $a_1 w_{J_1} I \;+ \ldots + a_{p+1} w_{J_{p+1}} I \;= 0$ dostaneme, že nějaká kratší lineární kombinace $w_{J_l} I$ je nulová, což je spor s indukčním předpokladem.

Nyní ukažme, že S je ireducibilní reprezentace $\mathrm{Cl}(V)$. Kdyby existoval společný invariantní podprostor všech endomorfizmů daných násobením prvky w_i a $\bar{w}_i$, pak bychom z něj mohli vzít vektor $\sum_1^p a_l w_{J_l} I$ a aplikací nějakého $\bar{w}_i$ ho převést na nenulový vektor určený sumou méně než p členů. Opakováním postupu jej přivedeme až na tvar $b_l w_{J_l'} I$ a dále na cI, odkud již nagenerujeme aplikacemi w_i všechny vektory báze. Tedy netriviální invariantní podprostor neexistuje. Jelikož prvky centra komutují speciálně se všemi w_i i $\bar{w}_i$, musí být podle Schurova lemmatu konstantní na celém S. Mohou to tedy být pouze prvky nulté části Cliffordovy algebry. □

Definice 6. Zaveďme na $\mathrm{Cl}(V)$ antiinvoluci $(v_1 \dots v_p)^* = (-)^p v_p \dots v_1$ a involuci $\alpha(v_1 \dots v_p) = (-1)^p v_1 \dots v_p$. Dále definujme grupu

$$\mathrm{Spin}(g) = \{x \in \mathrm{Cl}^+(V, g) | xx^* = 1 \wedge xVx^* \subset V\;\}$$

Tvrzení 4. *Zobrazení* $\rho(x) : V \to V$ *definované pro* $x \in \mathrm{Spin}(g)$ *vztahem* $\rho(x)(v) = xv\; x^*$ *je prvkem* $\mathrm{SO}(g)$ *a zobrazení* $\rho : \mathrm{Spin}(g) \to \mathrm{SO}(g)$ *je dvojnásobné nakrytí.*

Důkaz. Definujme o něco větší grupu $\mathrm{Pin}(g) = \{x \in \mathrm{Cl}(V, g) | xx^* = 1 \wedge xVx^* \subset V\;\}$ a dokažme, že homomorfizmus $\rho(x)(v) = \alpha(x)vx^*$, který je rozšířením původního ρ, je surjekce na $O(g)$. Protože pro $v \in V$ je $g(v, v) = vv = -vv^*$, platí pro $x \in \mathrm{Cl}(V)$

$$\begin{aligned} g(\rho(x)(v), \rho(x)(v)) &= -\alpha(x)vx^*(\alpha(x)vx^*)^* \\ &= -\alpha(x)vx^*xv^*\alpha(x)^* \\ &= \alpha(x)g(v,v)\alpha(x^*) = g(v,v), \end{aligned}$$

a $\rho(x)$ je ortogonální zobrazení. Pokud $x \in V$, pak je $\rho(x)$ reflexe podle nadroviny kolmé na vektor x, neboť $\alpha(x)xx^* = -xxx^* = -x$ a pro $v \perp x$ je $\alpha(x)vx^* = -xvx^* = vxx^* = v$. Protože každé ortogonální zobrazení lze získat jako složení reflexí podle nadrovin, je ρ surjekce. Omezíme-li se na $x \in \mathrm{Cl}^+(V)$, získáváme podle definice grupu $\mathrm{Spin}(g) \subset \mathrm{Pin}(g)$ a restrikce ρ je opět surjekcí na $\mathrm{SO}(g)$, neboť libovolnou rotaci lze složit ze dvou reflexí. Na $\mathrm{Cl}^+(V)$ je $\alpha(x) = x$, takže pro $x \in \operatorname{Ker}\rho$ musí platit $xv = vx$ pro všechna $v \in V$ a tedy x je v centru $\mathrm{Cl}(V)$. Podle tvrzení 3 je x konstanta, která, má-li náležet $\mathrm{Spin}(g)$, může být pouze ± 1. □

Akce prvku $\cos t + \tilde{e}_i\tilde{e}_j \sin t$ je

$$(\cos t + \tilde{e}_i\tilde{e}_j \sin t)\tilde{e}_p(\cos t + \tilde{e}_j\tilde{e}_i \sin t) = \begin{cases} \tilde{e}_p & p \neq i, j \\ \tilde{e}_i \cos 2t + \tilde{e}_j \sin 2t & p = i \\ -\tilde{e}_i \sin 2t + \tilde{e}_j \cos 2t & p = j, \end{cases} \tag{6}$$

jinými slovy rotace v rovině určené vektory $\tilde{e}_i, \tilde{e}_j$, která ponechává na místě vektory k této rovině kolmé. Každá rotace v p-rozměrném prostoru je určena ortonormální bází $\{\tilde{e}'_1, \dots, \tilde{e}'_p\}$, na niž se zobrazí vektory výchozí pevně zvolené ortonormální báze $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p\}$. Tvrdíme, že ji lze vždy napsat jako složení rotací tvaru $\cos t + vw \sin t$, kde $v, w \in V$, $v \perp w$, $g(v,v) = g(w,w) = 1$. V případě dimenze 2 je tvrzení zřejmé z (6). Předpokládejme, že pro $(p-1)$-rozměrné prostory tvrzení platí. V dimenzi p najdeme zleva první index l takový, že $\tilde{e}'_l \neq \tilde{e}_l$ a nalezneme vhodné $v, w \in V$, $t \in \mathbb{R}$, že $\cos t + vw \sin t$ je rotace převádějící $\tilde{e}_l$ a $\tilde{e}'_l$ a fixující podprostor vektorů na oba tyto vektory kolmých. Zbytek báze $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p\}$ se zobrazí na bázi ortogonálního doplňku $\tilde{e}'_l$, kterou lze podle indukčního předpokladu zobrazit na $\{\tilde{e}'_1, \dots, \widehat{\tilde{e}'_l}, \dots \tilde{e}'_p\}$ složením rotací tvaru $\cos t + vw \sin t$.

Protože $(vw)^2 = -1$, lze psát $\cos t + vw \sin t = \exp(tvw)$ a na základě poučky z lineární algebry $\exp(tvw)u\ \exp(-tvw) = \exp t[vw, \cdot](u)$, takže každá elementární rotace v rozkladu je prvkem jednoparametrické podgrupy – rodiny automorfizmů, jejíž tečný vektor je endomorfizmus $u \to [vw, u]$. Všechny tyto endomorfizmy tvoří lineární prostor $\mathrm{Cl}^2(V)$ z věty (3.1) a z grupy definovaná operace Lieovy závorky

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp(t\tilde{e}_i\tilde{e}_j))(\tilde{e}_k\tilde{e}_l) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(t\tilde{e}_i\tilde{e}_j)\tilde{e}_k\tilde{e}_l\exp(-t\tilde{e}_i\tilde{e}_j) = \tilde{e}_i\tilde{e}_j\tilde{e}_k\tilde{e}_l - \tilde{e}_k\tilde{e}_l\tilde{e}_i\tilde{e}_j$$

souhlasí s Lieovou závorkou, která dodávala $\mathrm{Cl}^2(V)$ strukturu $\mathfrak{so}(2k)$ ve větě (3.1).

TVRZENÍ 5. *Prvky $H_i = w_i\bar{w}_i - \frac{1}{2}$ generují Cartanovu podalgebru $\mathrm{Cl}^2(V) \equiv \mathfrak{so}(2k)$ a spinorová reprezentace se vůči $\mathfrak{so}(k)$ rozpadá na dvě ireducibilní komponenty $S = S^+ \oplus S^-$, kde $S^\pm = S \cap \mathrm{Cl}^\pm$ a nejvyšší váhy mají souřadnice $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$.*

DŮKAZ. Lineární nezávislost i vzájemná komutace prvků H_i je zřejmá, neboť

$$H_i = w_i\bar{w}_i - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(w_i\bar{w}_i - \bar{w}_iw_i) = \frac{1}{2}\tilde{e}_{2i-1}\tilde{e}_{2i} \tag{7}$$

jsou součiny vzájemně disjunktních dvojic vektorů ortonormální báze V, a ty mezi sebou antikomutují. H_i je celkem k, což je rank $\mathfrak{so}(2k)$, a tvoří tedy Cartanovu podalgebru. Podle tvrzení 3 je $S = \Lambda(W)I$, konkrétně bázi S tvoří prvky tvaru w_JI, kde J je uspořádaná množina indexů.

$$H_iw_JI = w_i\bar{w}_iw_JI - \frac{1}{2}w_JI = \begin{cases} \frac{1}{2}w_JI & i \in J \\ -\frac{1}{2}w_JI & i \notin J, \end{cases} \tag{8}$$

takže vektory této báze jsou přímo váhovými vektory vůči H_i s vahami o souřadnicích $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \dots, \pm\frac{1}{2})$. Působení w_i a $\bar{w}_i$ jakožto prvků $\mathrm{End}\, S$ jsme viděli v důkazu tvrzení 3, $\mathfrak{so}(2k)$ má ale za bázi w_iw_j, $\bar{w}_i\bar{w}_j$, $i < j$ a $w_p\bar{w}_q$. Z libovolného vektoru w_JI lze tedy endomorfizmy z $\mathrm{Cl}^2(V)$ přejít pouze k vektorům téže parity a lze přejít ke všem. Úvaha je pouze malou obměnou té v důkazu tvrzení 3. □

V případě liché dimenze prostoru V (rovné $2k+1$) definujeme w_i a $\bar{w}_i$ stejně jako předešle pro $1 \le i \le k$ a dále prvek $u = \frac{1}{2}(1 + i\tilde{e}_{2k+1})$. Platí, že $u^2 = u$ a tedy redefinované $I = w_1\bar{w}_1 \dots w_k\bar{w}_ku$ je také idempotentní. Protože $uw = w(1-u)$ pro všechna $w \in W \oplus W'$, zůstává v platnosti tvrzení 3 – u pouze projektuje $\Lambda(W)I$ na $\Lambda^+(W)I$. Definice grupy Spin a následné úvahy využívaly pouze fakt, že v centru $\mathrm{Cl}(V)$ jsou pouze konstanty, zůstávají tedy beze změny v platnosti. Cartanovu podalgebru můžeme volit stejně, takže jediný rozdíl oproti tvrzení 5 bude v tom, že tentokrát se S na součet nerozpadne, protože například prvky tvaru $uw_i \in \mathrm{Cl}(V)$ zobrazují $\Lambda^-(W)I$ do $\Lambda^+(W)I$.

KAPITOLA 3

Parabolické podalgebry

1. Parabolická podalgebra

DEFINICE 7 (*Borelova podalgebra*). Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra, její maximální řešitelnou podalgebru $\mathfrak{b}$ nazýváme Borelovou podalgebrou. Je-li $\mathfrak{g}$ polojednoduchá, a máme-li v ní zvolenu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ a rozdělení kořenového systému $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ na kladnou a zápornou část, potom *standardní Borelovou podalgebrou* $\mathfrak{b}(\Delta)$ rozumíme $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$.

Standardní Borelova podalgebra je jistě řešitelná, protože definujeme-li výšku prvku $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ jako nulu na $\mathfrak{h}$ a součet koeficientů v rozvoji do jednoduchých kořenů na $\mathfrak{g}_\alpha$, vidíme z $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = 0$, $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha$ a $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta] \subset g_{\alpha+\beta}$, že člen derivované posloupnosti $\mathfrak{g}^{(k)}$ obsahuje pouze prvky výšky větší nebo rovné k. Výška je v kořenovém systému shora omezená, takže derivovaná posloupnost končí nulami.

Každá $\mathfrak{p}$ obsahující $\mathfrak{b}(\Delta)$ jako vlastní podalgebru musí obsahovat i některý podprostor $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, v opačném případě by nebyla stabilní vůči akci $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$. Potom $\mathfrak{p}$ obsahuje jednoduchou podalgebru $\mathfrak{s}_\alpha$, jejíž derivovaná posloupnost je konstantně rovna $\mathfrak{s}_\alpha$. Protože $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{s}^{(k)} \subset \mathfrak{p}^{(k)}$, není $\mathfrak{p}$ řešitelná.

DEFINICE 8 (*Parabolická podalgebra*). Podalgebra $\mathfrak{p}$ splňující $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ se nazývá parabolickou. *Standardní parabolická podalgebra* je $\mathfrak{b}_\Delta \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_\Sigma} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, kde $\Sigma \subset \Delta_0$ a Δ_Σ je množina všech kořenů s nulovými koeficienty u jednoduchých kořenů z $\Delta_0 \setminus \Sigma$.

Polojednoduchou Lieovu algebru lze rozložit na součet

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \bigoplus_{\alpha\in\Delta\setminus\Delta_\Sigma} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_\Sigma} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta\setminus\Delta_\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha \\ &= \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^* \oplus \mathfrak{m}^*\end{aligned}$$

Platí $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^* \oplus \mathfrak{m}^* = \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{p}$. Algebra $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^*$ je reduktivní, tj. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}'$, kde $\mathfrak{h}_0$ je lineární obal prvků $[\mathfrak{g}_{-\alpha},\mathfrak{g}_\alpha]$, $\alpha \in \Delta_\Sigma$, a tedy $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{0s} \oplus \mathfrak{h}'$, součet polojednoduché $\mathfrak{g}_{0s}$ a komutativní $\mathfrak{h}'$, která tvoří centrum $\mathfrak{g}_0$. $\mathfrak{m}$

i $\mathfrak{m}^*$ jsou nilpotentní algebry duální vzhledem ke Cartanově-Killingově formě a $\mathfrak{m}^*$ je ideálem v $\mathfrak{p}$. Parabolické podalgebry nějaké jednoduché algebry $\mathfrak{g}$ spadají do tříd izomorfizmů odpovídajících různým volbám množiny Σ. Je zvykem je značit okřížkováním kořenů, které do Σ nepatří. Dynkinův diagram $\mathfrak{g}_{0s}$ se dostane jednoduše vynecháním všech okřížkovaných kořenů a jejich spojnic s ostatními kořeny.

V $\mathfrak{h}'$ existuje element E, který má kladné celočíselné hodnoty počínající jedničkou na $\mathfrak{m}$ a záporné celočíselné na $\mathfrak{m}^*$. Nazýváme jej *gradovacím elementem* a často píšeme

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_k$$

a mluvíme o $|k|$-*gradaci*. Ta splňuje podmínku $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$. Gradovací element působí jako násobení skalárem na libovolném ireducibilním $\mathfrak{g}_0$-modulu a pomocí rozkladu na ireducibilní komponenty lze každému $\mathfrak{g}_0$-modulu přiřadit množinu přirozených čísel zvaných *geometrické váhy*. Podobně lze mluvit o geometrických vahách funkce s hodnotami v nějakém $\mathfrak{g}_0$-modulu. Například funkce křivosti, kterou zavedeme v kapitole 4, nabývá hodnot v $\Lambda^2\mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{g}$. Je-li l nejvyšší geometrická váha v $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-l} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_l$, může křivost v prvních dvou složkách nabývat vah 1 až l a v poslední $-l$ až l, tedy $\kappa = \sum_{-l+2}^{3l} \kappa_j$.

2. Algebra $\mathfrak{co}(2k-1,1)$

Nechť $\mathfrak{g}$ je reálná Lieova algebra $\mathfrak{so}(2k,2)$. Zvolme bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^{2k+2}$ tak, že matice $Q_{ij} \equiv g(e_i, e_j)$ má tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & E_{2k-1,1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $E_{2k-1,1}$ je matice mající na diagonále $2k-1$ jedniček a jednu minus jedničku. Prvek $\mathfrak{so}(2k,2)$ je v této bázi obecně dán jako

$$\begin{pmatrix} z & q & 0 \\ p & s & q^T \\ 0 & p^T & -z \end{pmatrix} \quad s \in \mathfrak{so}(2k-1,1), p, q \in \mathbb{R}^{2k}, z \in \mathbb{R}$$

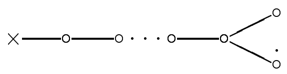
Rozklad $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{0s} \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{g}_1$ daný maticově

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & p^T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

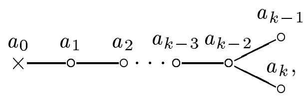
je $|1|$-gradace s gradovacím elementem

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathfrak{g}_{-1} \equiv \mathfrak{m}^* = \mathbb{R}^{2k} = \mathfrak{m} \equiv \mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(2k-1,1) \oplus \mathbb{R} \equiv \mathfrak{co}(2k-1,1)$. Dynkinův diagram $\mathfrak{so}(2k,\mathbb{C})$[1] je možné dostat pouze vyškrtnutím prvního kořenu, takže parabolickou podalgebru $\mathfrak{co}(2k-1,1) \oplus \mathbb{R}^{2k}$ označíme diagramem



Centrum $\mathfrak{co}(2k-1,1)$ je jednorozměrné, takže ireducibilní reprezentace jsou zcela charakterizovány dominantní vahou $\mathfrak{g}_{0s} = \mathfrak{so}(2k-1,1)$ a geometrickou vahou γ, které se v tomto případě říká konformní váha. Jiná charakterizace je pomocí okřížkovaného Dynkinova diagramu s vepsanými koeficienty

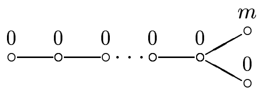


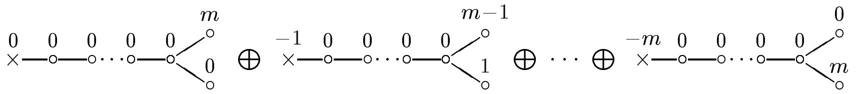
kde a_0 je libovolné celé číslo a zbylé koeficienty tvoří dominantní váhu $\mathfrak{so}(2k-1,1)$. Vztah mezi a_0 a γ je

$$\gamma = a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_{k-2} + \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_k), \tag{9}$$

čili γ je koeficient u kořene $L_1 - L_2$, který dostaneme zapsáním této váhy v bázi jednoduchých kořenů $\mathfrak{so}(2k,2)$.

[1] Mluvíme raději o Dynkinově diagramu komplexní Lieovy algebry, protože ta má několik reálných forem vzájemně graficky odlišených začerněním některých uzlů. Existují dvě konvence, jedna vede k tzv. Voganovým diagramům, druhá k Satakeho. Zajímáme se o jednu určitou reálnou formu, takže toto značení nepotřebujeme.

Lemma 2. *Nechť $k \leq 2$. Reprezentace*  *algebry $\mathfrak{so}(2k+2)$ má rozklad podle $\mathfrak{co}(2k)$*



Důkaz. Značme pro pohodlí $0\;0\;0\ldots0\;0\;{}^{m}_{0}$ reprezentaci $\mathfrak{so}(2k+2)$ a $0\,|\,0\;0\ldots0\;0\;{}^{m}_{0}$ reprezentaci $\mathfrak{co}(2k)$. Souřadnice reprezentace $0\;0\;0\ldots0\;0\;{}^{m}_{0}$ jsou $(\underbrace{\tfrac{m}{2},\tfrac{m}{2},\ldots,\tfrac{m}{2}}_{k+1})$ a podle větvících pravidel (2.1) je tedy její rozklad vůči $\mathfrak{so}(2k+1)$ jednočlenný s týmiž souřadnicemi. Další rozklad vůči $\mathfrak{so}(2k)$ je v souřadnicích vyjádřen

$$(\underbrace{\tfrac{m}{2},\tfrac{m}{2},\ldots,\tfrac{m}{2}}_{k})\oplus(\underbrace{\tfrac{m}{2},\tfrac{m}{2},\ldots,\tfrac{m}{2}-1}_{k})\oplus\ldots\oplus(\underbrace{\tfrac{m}{2},\tfrac{m}{2},\ldots,-\tfrac{m}{2}}_{k}),$$

což je v bázi fundamentálních vah

$$0\;0\;0\ldots0\;0\;{}^{m}_{0}\;\oplus\;0\;0\;0\ldots0\;0\;{}^{m-1}_{1}\;\oplus\ldots\oplus\;0\;0\;0\ldots0\;0\;{}^{0}_{m}$$

Zbývá určit koeficienty nad okřížkovanými kořeny.

Jednoduché kořeny $\mathfrak{so}(2k+2)$ mají v bázi fundamentálních vah vyjádření $\alpha_0 = 2\;-1\;0\ldots0\;0\;{}^{0}_{0}$, $\alpha_1 = -1\;2\;-1\ldots0\;0\;{}^{0}_{0}$, $\ldots$, $\alpha_{k-2} = 0\;0\;0\ldots-1\;2\;{}^{-1}_{-1}$, $\alpha_{k-1} = 0\;0\;0\ldots0\;-1\;{}^{2}_{0}$, $\alpha_k = 0\;0\;0\ldots0\;-1\;{}^{0}_{2}$, přičemž i-tý kořen z tohoto seznamu je duální k i-té fundamentální váze (té, která má jednotku tam, kde duální kořen dvojku, a jinde má nuly). Váhy ireducibilní reprezentace můžeme hledat tak, že nalezneme reflexi její nejvyšší váhy λ podle jednoduchých kořenů, která se rovná $\lambda - \langle\lambda,\alpha_i\rangle\alpha_i$, doplníme váhy $\lambda - p\alpha_i$, $p \in \mathbb{Z}$, $0 < p < \langle\lambda,\alpha_i\rangle$ a na doplněných vahách postup opakujeme, dokud budou existovat váhy s kladným $\langle\lambda,\alpha_i\rangle$, jejichž reflexi podle α_i jsme dosud neprovedli. Váha $0\;0\;0\ldots0\;0\;{}^{m}_{0}$ má nenulový skalární součin pouze s kořenem α_{k-1}. Odečtením tohoto kořene přejde na váhu $0\;0\;0\ldots0\;1\;{}^{m-2}_{0}$. Ta má určitě nenulový skalární součin s vahou α_{k-2}. Prodloužením tohoto postupu dostáváme sekvenci

$$0\;0\;0\ldots0\;0\;{}^{m}_{0}\xrightarrow{\alpha_{k-1}}0\;0\;0\ldots0\;1\;{}^{m-2}_{0}\xrightarrow{\alpha_{k-2}}0\;0\;0\ldots1\;-1\;{}^{m-1}_{1}\xrightarrow{\alpha_{k-3}}\ldots$$
$$\ldots\xrightarrow{\alpha_1}1\;-1\;0\ldots0\;0\;{}^{m-1}_{1}\xrightarrow{\alpha_0}-1\;0\;0\ldots0\;0\;{}^{m-1}_{1}$$

Bereme-li $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_k$ za kořeny $\mathfrak{so}(2k)$, má poslední váha na $\mathfrak{so}(2k)$ dominantní zúžení a dalším odečítáním těchto kořenů bychom nalezli množinu vah, jejichž váhové vektory tvoří reprezentaci $\mathfrak{so}(2k)$ s nejvyšší vahou $0\;0\;0\ldots0\;0\;{}^{m-1}_{1}$, vůči

$\mathfrak{co}(2k)$ $-1|0\ 0 \ldots 0\ 0\ {}^{m-1}_{1}$. Pokud je $m-1>0$, můžeme opět odečíst α_{k-1} a dospějeme posléze k váze $-2|0\ 0 \ldots 0\ 0\ {}^{m-2}_{2}$. Prodloužením tohoto postupu nalezneme všechny váhy vyskytující se v rozkladu podle dokazovaného tvrzení. Z větvících pravidel plyne, že mají všechny multiplicitu jedna a že žádné jiné váhy se v rozkladu nevyskytují. □

3. Lie-algebraická homologie a kohomologie

Lie algebraická homologie a kohomologie je reprezentačně teoretický nástroj zavedený Kostantem v článku [**Ko61**]. Je užitečná jednak pro budování obecné teorie v kapitole 4, jednak pro výpočet reprezentačních typů bandlů v BGG posloupnostech. V našem výkladu se držíme modernějšího zápisu z článku [**CD99**].

Definice 9. Nechť $\mathbb{W}$ je $\mathfrak{p}$-modul, pak definujme prostory k-řetězců

$$C_k(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) = \Lambda^k \mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$$

Lemma 3. *Akce $\xi \in \mathfrak{p}$ na $\beta \in \Lambda^k \mathfrak{m}^*$ je dána vztahem*

$$\xi \cdot \beta = \sum_i [\xi, \varepsilon^i] \wedge (e_i \lrcorner \beta),$$

kde $\{e_i\}$, $\{\varepsilon^i\}$ jsou duální báze $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{m}^*$.

Důkaz. Stačí ověřit pro $\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k$, kde β_i jsou 1-formy. Akce $\xi \in \mathfrak{p}$ na $\beta_i \in \mathfrak{m}^*$ je obyčejný komutátor v algebře $\mathfrak{g}$, neboť $\xi \cdot \beta = \sum [\xi, \varepsilon^i] \otimes \beta(e_i) = [\xi, \beta]$. To je dobře definováno, protože $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{m}^*] \subset \mathfrak{m}^*$ a $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{m}^*$. Tedy

$$\begin{aligned}
\xi \cdot \beta &= \sum_i \beta_1 \wedge \ldots \wedge (\xi \cdot \beta_i) \wedge \ldots \wedge \beta_k \\
&= \sum_i \sum_j \beta_1 \wedge \ldots \wedge [\xi, \varepsilon^j] \beta_i(e_j) \wedge \ldots \wedge \beta_k \\
&= \sum_j [\xi, \varepsilon^j] \wedge \sum (-)^{i+1} \beta_1 \wedge \ldots \beta_i(e_j) \wedge \ldots \wedge \beta_k \\
&= \sum_j [\xi, \varepsilon^j] \wedge e_j \lrcorner \beta.
\end{aligned}$$

□

LEMMA 4. *Nechť* $\xi \in \mathfrak{p}$, $\beta \in \Lambda^l \mathfrak{m}^*$, $\alpha \in \Lambda^k \mathfrak{m}^*$, $v \in \mathfrak{m}$. *Pak*

$$\xi \cdot (\alpha \wedge \beta) = (\xi \cdot \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\xi \cdot \beta)$$

$$\begin{aligned} v \lrcorner (\xi \cdot \beta) &= \xi \cdot (v \lrcorner \beta) + \sum_i \langle [\xi, \varepsilon^i], v \rangle (e_i \lrcorner \beta) \\ &= \xi \cdot (v \lrcorner \beta) - [\xi, v]_{\mathfrak{m}} \lrcorner \beta, \end{aligned}$$

přičemž pod $[\xi, v]_{\mathfrak{m}}$ *rozumíme projekci Lieovy závorky v* $\mathfrak{g}$ *na* $\mathfrak{m}$.

DŮKAZ. První tvrzení je triviální. V důkazu druhého berme opět $\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k$:

$$v \lrcorner (\xi \cdot \beta) = \sum_{i,j} (-)^{j+1} \beta_1 \wedge \ldots \wedge (v \lrcorner \beta_j) \wedge \ldots \wedge (\xi \cdot \beta_i) \wedge \ldots \wedge \beta_k$$

$$\xi \cdot (v \lrcorner \beta) = \sum_{i \neq j} (-)^{j+1} \beta_1 \wedge \ldots \wedge (v \lrcorner \beta_j) \wedge \ldots \wedge (\xi \cdot \beta_i) \wedge \ldots \wedge \beta_k.$$

Rozdíl mezi těmito dvěma sumami představují pouze diagonální členy:

$$v \lrcorner (\xi \cdot \beta) - \xi \cdot (v \lrcorner \beta) = \sum_j (-)^{j+1} \beta_1 \wedge \ldots \wedge v \lrcorner (\xi \cdot \beta_j) \wedge \ldots \wedge \beta_k$$

Po rozepsání do báze $\beta_j = \sum \varepsilon^i \beta_j(e_i)$ můžeme sumu přes j psát jako $e_i \lrcorner \beta$ a koeficienty $v \lrcorner (\xi \cdot \varepsilon^i)$ jako $[\xi, \varepsilon^i](v) = -\langle [\varepsilon^i, \xi], v \rangle$. Celkem tedy

$$v \lrcorner (\xi \cdot \beta) - \xi \cdot (v \lrcorner \beta) = -\sum_i \langle [\varepsilon^i, \xi], v \rangle (e_i \lrcorner \beta) = -\sum_i \langle \varepsilon^i, [\xi, v] \rangle (e_i \lrcorner \beta)$$

Druhá rovnost je dána invariancí Cartanovy-Killingovy formy ($\mathrm{Tr}([x, y]z) = \mathrm{Tr}(xyz - yxz) = \mathrm{Tr}(xyz - xzy) = \mathrm{Tr}(x[y, z])$. ε^i tvoří bázi $\mathfrak{m}^*$ a tedy $\langle \varepsilon^i, [\xi, v] \rangle (e_i \lrcorner \beta) = [\xi, v]_{\mathfrak{m}} \lrcorner \beta$ □

DEFINICE 10. *Kodiferenciál* je zobrazení $\delta_{\mathfrak{m}^*} : C_k(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) \to C_{k-1}(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$ dané vztahem

$$\delta_{\mathfrak{m}^*}(\beta \otimes w) = \sum_i \frac{1}{2} \varepsilon^i \cdot (e_i \lrcorner \beta) \otimes w + (e_i \lrcorner \beta) \otimes \varepsilon^i \cdot w$$

LEMMA 5. *Nechť* $\alpha \in \mathfrak{m}^*$, $\beta \in \Lambda^k \mathfrak{m}^*$, $w \in \mathbb{W}$, $c \in C_k(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$. *Pak platí*

$$\sum_i e_i \lrcorner (\alpha \wedge \beta) \otimes \varepsilon^i \cdot w + \sum_i \alpha \wedge (e_i \lrcorner \beta) \otimes \varepsilon^i \cdot w = \beta \otimes \alpha \cdot w$$

$$\sum_i \varepsilon^i \cdot (e_i \lrcorner (\alpha \wedge \beta)) \otimes w + \sum_i \alpha \wedge \varepsilon^i \cdot (e_i \lrcorner \beta) \otimes w = 2\alpha \cdot \beta \otimes w,$$

odkud pak plyne Cartanova identita $\delta_{\mathfrak{m}^*}(\alpha \wedge c) + \alpha \wedge (\delta_{\mathfrak{m}^*} c) = \alpha \cdot c$.

DŮKAZ. První rovnost je okamžitým důsledkem vlastností vnějšího a vnitřního součinu: $e_i \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = \alpha(e_i)\beta - \alpha \wedge (e_i \lrcorner \beta)$. Stejný vztah se hodí i při důkazu rovnosti druhé:

$$\sum_i \varepsilon^i \cdot (e_i \lrcorner (\alpha \wedge \beta)) = \alpha \cdot \beta - \sum_i (\varepsilon^i \cdot \alpha) \wedge (e_i \lrcorner \beta) - \sum_i \alpha \wedge \varepsilon^i \cdot (e_i \lrcorner \beta)$$

Druhý člen lze přepsat užitím lemmatu 3 takto

$$-\sum_i (\varepsilon^i \cdot \alpha) \wedge (e_i \lrcorner \beta) = \sum_i [\alpha, \varepsilon^i] \wedge (e_i \lrcorner \beta) = \alpha \cdot \beta.$$

Výsledek odtud dostáváme algebraickou úpravou a tenzorovým součinem s w. Cartanovu identitu snadno dokážeme dosazením právě odvozených rovností. □

LEMMA 6. $\delta_{\mathfrak{m}^*} \circ \delta_{\mathfrak{m}^*} = 0$

DŮKAZ. Pro přehlednost nejprve provedeme pro triviální reprezentaci $\mathbb{W} = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
4\delta_{\mathfrak{m}^*}(\delta_{\mathfrak{m}^*}\beta) &= \sum_{i,j} \varepsilon \cdot (e^j \lrcorner (\varepsilon^i \cdot (e_i \lrcorner \beta))) \\
&= \sum_{i,j} \varepsilon^j \cdot (\varepsilon^i \cdot (e_j \lrcorner (e_i \lrcorner \beta))) + \sum_{i,j,k} \varepsilon^j \cdot \langle [\varepsilon^i, \varepsilon^k], e_j \rangle (e_k \lrcorner (e_i \lrcorner \beta)) \\
&= \sum_{i,j} \varepsilon^j \cdot (\varepsilon^i \cdot (e_j \lrcorner (e_i \lrcorner \beta))) + \sum_{i,k} [\varepsilon^i, \varepsilon^k] \cdot (e_k \lrcorner (e_i \lrcorner \beta)) \\
&= \sum_{i,j} (\varepsilon^j \cdot \varepsilon^i + \varepsilon^i \cdot \varepsilon^j - \varepsilon^j \cdot \varepsilon^i) \cdot (e_j \lrcorner (e_i \lrcorner \beta)) \\
&= \sum_{i,j} \frac{1}{2} \varepsilon^i \cdot \varepsilon^j \cdot (e_j \lrcorner (e_i \lrcorner \beta)) - \sum_{i,j} \frac{1}{2} \varepsilon^i \cdot \varepsilon^j \cdot (e_i \lrcorner (e_j \lrcorner \beta)) \\
&= \sum_{i,j} \frac{1}{2} [\varepsilon^i, \varepsilon^j] \cdot (e_j \lrcorner (e_i \lrcorner \beta)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} [[\varepsilon^i, \varepsilon^j], \varepsilon^k] \wedge (e_k \lrcorner (e_j \lrcorner (e_i \lrcorner \beta))) = 0
\end{aligned}$$

Závěrečná rovnost je důsledkem Jacobiho identity, neboť trojitý vnitřní součin nemění při cyklické záměně indexů znaménko.

Nyní zkoumejme obecný případ.

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathfrak{m}^*}(\delta_{\mathfrak{m}^*}(\beta\otimes w)) &= 0+\sum_{i,j} e_i \lrcorner (e_j \lrcorner \beta)\otimes \varepsilon^i\cdot\varepsilon^j\cdot w + \frac{1}{2}\sum_{i,j} e_i \lrcorner (\varepsilon^j\cdot(e_j\lrcorner\beta))\otimes\varepsilon^i\cdot w\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\varepsilon^i\cdot(e_i\lrcorner(e_j\lrcorner\beta))\otimes\varepsilon^j\cdot w\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i,j} e_i\lrcorner(e_j\lrcorner\beta)\otimes[\varepsilon^i,\varepsilon^j]\cdot w\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\langle[\varepsilon^j,\varepsilon^k],e_i\rangle(e_k\lrcorner(e_j\lrcorner\beta))\otimes\varepsilon^i\cdot w
\end{aligned}$$

V poslední úpravě jsme opět zaměnili pořadí ve dvojitém vnitřním součinu, přeznačili indexy a využili lemmatu 4. Ve výsledku stačí jen přesunout $[\varepsilon^j,\varepsilon^k]$ do druhé složky tenzorového součinu a vidíme, že oba sčítance se vzájemně ruší. □

Lemma 7. *$\delta_{\mathfrak{m}^*}$ je $\mathfrak{p}$-ekvivariantní.*

Důkaz. Plyne ze zdlouhavého ale přímočarého výpočtu dosazením do definic. Vypisovat jej nebudeme, ukážeme pouze $\mathfrak{m}^*$-ekvivarianci. Pro $\alpha\in\mathfrak{m}^*$ a $c\in C_k(\mathfrak{m}^*,\mathbb{W})$ máme

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathfrak{m}^*}(\alpha\cdot c) &= \delta_{\mathfrak{m}^*}(\delta_{\mathfrak{m}^*}(\alpha\wedge c))+\delta_{\mathfrak{m}^*}(\alpha\wedge\delta_{\mathfrak{m}^*}c)\\
\alpha\cdot\delta_{\mathfrak{m}^*}c &= \delta_{\mathfrak{m}^*}(\alpha\wedge\delta_{\mathfrak{m}^*}c)+\alpha\wedge(\delta_{\mathfrak{m}^*}(\delta_{\mathfrak{m}^*}c))
\end{aligned}$$

Tedy $\delta_{\mathfrak{m}^*}(\alpha\cdot c)=\alpha\cdot\delta_{\mathfrak{m}^*}c$. □

Lemma 8. $\mathfrak{m}^*\cdot(\operatorname{Ker}\delta_{\mathfrak{m}^*})\subset\operatorname{Im}\delta_{\mathfrak{m}^*}$

Důkaz. Zřejmé z Cartanovy identity. □

Příklad 1. Pro $\alpha\in\mathfrak{m}^*$ je

$$\delta_{\mathfrak{m}^*}(\alpha\otimes w)=\frac{1}{2}\sum_i\varepsilon^i\cdot\alpha(e_i)\otimes w+\alpha(e_i)\otimes\varepsilon^i\cdot w=\alpha\cdot w,$$

neboť ε^i má na $\alpha(e_i)\in\mathbb{C}$ triviální akci. Tedy $\operatorname{Im}\delta_1=\mathfrak{m}^*\cdot\mathbb{W}$, a protože $\operatorname{Ker}\delta_0=\mathbb{W}$, platí obecně $H_0(\mathfrak{m}^*,\mathbb{W})=W/(\mathfrak{m}^*\mathbb{W})$. Této množině se někdy říká prostor koinvariantů.

Příklad 2. Pro triviální reprezentaci a abelovskou $\mathfrak{m}^*$ je situace velmi jednoduchá, neboť $\delta_{\mathfrak{m}^*}\beta=\frac{1}{2}\sum[\varepsilon^i,\varepsilon^k]\wedge(e_k\lrcorner e_i\lrcorner\beta)=0$.

Prostor $\Lambda^k\mathfrak{m}^*\otimes\mathbb{W}$ můžeme chápat také jako prostor kořetězců $C^k(\mathfrak{m},\mathbb{W})$. Akce $\mathfrak{p}^*=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{m}$ na tomto prostoru je podobná jako akce $\mathfrak{p}$, jen je třeba vzít v komutátorech projekci na $\mathfrak{m}^*$:

$$\chi\cdot\beta=\sum_i[\chi,\varepsilon^i]_{\mathfrak{m}^*}\wedge(e_i\lrcorner\beta)=\sum\varepsilon^i\wedge([e_i,\chi]\lrcorner\beta),$$

kde $\chi\in\mathfrak{p}^*$, $\beta\in\Lambda^k\mathfrak{m}^*$, $\{e_i\}$, $\{\varepsilon^i\}$ duální báze $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{m}^*$. Druhé vyjádření $\chi\cdot\beta$ odvodíme ve dvou krocích. Pro $k=1$ lze psát

$$\chi\cdot\beta=\sum[\chi,\varepsilon^i]_{\mathfrak{m}^*}\beta(e_i)=[\chi,\beta]_{\mathfrak{m}^*}=\sum\langle[\chi,\beta]_{\mathfrak{m}^*},e_i\rangle\varepsilon^i=\sum\langle[e_i,\chi],\beta\rangle\varepsilon^i,$$

kde jsme využili invarianci Cartanovy formy. Pro $k>1$ a β totálně rozložitelnou pak

$$\begin{aligned}\chi\cdot(\beta_1\wedge\ldots\wedge\beta_k)&=\sum_i\beta_1\wedge\ldots\wedge[\chi,\beta_i]_{\mathfrak{m}^*}\wedge\ldots\wedge\beta_k\\&=\sum_{i,j}\langle[e_j,\chi],\beta_i\rangle\beta_1\wedge\ldots\wedge\varepsilon^j\wedge\ldots\wedge\beta_k\\&=\sum_{i,j}(-)^{i+1}([e_j,\chi]\lrcorner\beta_i)\varepsilon^j\wedge\beta_1\wedge\ldots\wedge\hat{\beta}_i\wedge\ldots\wedge\beta_k\\&=\sum_j\varepsilon^j\wedge([e_j,\chi]\lrcorner\beta).\end{aligned}$$

Definice 11. *Diferenciál $d_{\mathfrak{m}}:C^k(\mathfrak{m},\mathbb{W})\to C^{k+1}(\mathfrak{m},\mathbb{W})$* definujeme duálním předpisem

$$d_{\mathfrak{m}}(\beta\otimes w)=\sum\frac{1}{2}\varepsilon^i\wedge(e_i\cdot\beta)\otimes w+\varepsilon^i\wedge\beta\otimes e_i\cdot w$$

Podobně můžeme definovat operátory $d_{\mathfrak{m}^*}$ a $\delta_{\mathfrak{m}}$. Budeme-li rozlišovat ještě mezi modulem $\mathbb{W}$ a duálním modulem $\mathbb{W}^*$, dostaneme celkem osm operátorů definujících různé komplexy. Mezi nimi existují vztahy, které nám umožní tvrzení dokázaná pro $\delta_{\mathfrak{m}^*}$ rozšířit i na zbylé operátory. Zjevně stačí ukázat dualitu mezi $\delta_{\mathfrak{m}}:\Lambda^k(\mathfrak{m})\otimes\mathbb{W}^*\to\Lambda^{k-1}(\mathfrak{m})\otimes\mathbb{W}^*$ a $d_{\mathfrak{m}}:\Lambda^k(\mathfrak{m}^*)\otimes\mathbb{W}\to\Lambda^{k+1}(\mathfrak{m}^*)\otimes\mathbb{W}$.

Lemma 9. *Nechť $\beta\in\Lambda^k\mathfrak{m}^*$, $b\in\Lambda^{k+1}\mathfrak{m}$, $b'\in\Lambda^k\mathfrak{m}$, $\chi\in\mathfrak{p}^*$. Pak*

1. $\langle\varepsilon^i\wedge\beta,b\rangle=\langle\beta,\varepsilon^i\lrcorner b\rangle$
2. $\langle\chi\cdot\beta,b'\rangle=-\langle\beta,\chi\cdot b'\rangle$
3. $d_{\mathfrak{m}}=-(\delta_{\mathfrak{m}})^*$

Důkaz. V prvním tvrzení vezměme $\beta = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_k}$ a $b = e_{j_1 j_2 \dots j_{k+1}}$ bázové elementy vnější algebry. Pravá strana je pak nulová v případě, že i se nerovná některému z j_l. Pak ovšem bude rovna nule i levá strana, neboť na ní bude skalární součin dvou zcela jistě rozdílných elementů vnější algebry. Pokud se tedy i rovná nějakému j_l, lze jej s ním anihilovat a výsledkem je $(-)^{l-1} e_{j_1 \dots \hat{j}_l \dots j_{k+1}}$. V případě, že v β není některé ze zbylých j_s, bude pravá strana nulová. Pak bude ovšem zjevně nula i strana levá. Pokud tedy jsou všechna i_r rovna odpovídajícím zbylým j_s, bude skalární součin na pravé straně roven $(-)^{l-1}$. Na levé straně prokomutování ε^i na odpovídající místo dá tentýž faktor, čímž je tvrzení dokázáno pro speciální tvar β a b. Obecně by hrály roli konstanty úměrnosti a sumace, které lze ale vytknout díky bilinearitě skalárního součinu a ortogonalitě báze vnější algebry.

Důkaz druhého tvrzení provedeme indukcí. V případě $k = 1$ plyne tvrzení přímo z invariance Cartanovy-Killingovy formy. Pro $k > 1$ a b' totálně rozložitelné $b' = b_1 \wedge b''$, $b_1 \in \mathfrak{m}$ lze psát

$$\begin{aligned}
\langle \beta, \chi \cdot (b_1 \wedge b'') \rangle &= \langle \beta, (\chi \cdot b_1) \wedge b'' \rangle + \langle \beta, b_1 \wedge (\chi \cdot b'') \rangle \\
&= \langle \beta, (\chi \cdot b_1) \wedge b'' \rangle + \langle b_1 \lrcorner \beta, \chi \cdot b'' \rangle \\
&= \langle (\chi \cdot b_1) \lrcorner \beta, b'' \rangle - \langle \chi \cdot (b_1 \lrcorner \beta), b'' \rangle \\
&= -\langle b_1 \lrcorner (\chi \cdot \beta), b'' \rangle \\
&= -\langle \chi \cdot \beta, b_1 \wedge b'' \rangle
\end{aligned}$$

Používali jsme indukčního předpokladu a variací na lemma 4.

Třetí tvrzení je snadným důsledkem prvních dvou, pokud definujeme akci na duálním prostoru vztahem $\langle e_i \cdot w, w^* \rangle = -\langle w, e_i \cdot w^* \rangle$. Taková definice je přirozená, neboť odpovídá roznásobení akce na skalárním součinu a nulovosti akce na všech skalárech. □

Platí tedy následující věta:

Věta 3.1.

1. $d_{\mathfrak{m}}^2 = 0$
2. $d_{\mathfrak{m}}$ *je* $\mathfrak{p}^*$ *ekvivariantní.*
3. *Pro* $e \in \mathfrak{m}$, $\beta \in \Lambda^k \mathfrak{m}^*$ *platí*

$$d_{\mathfrak{m}}(e \lrcorner \beta) + e \lrcorner d_{\mathfrak{m}} \beta = e \cdot \beta$$

4. $\mathfrak{m} \cdot (\operatorname{Ker} d_\mathfrak{m}) \subset \operatorname{Im} d_\mathfrak{m}$

Dosud dokázaná dualita svazuje operátory působící na různých prostorech. My bychom ale potřebovali dualitu mezi operátory $d_\mathfrak{m}$ a $\delta_{\mathfrak{m}^*}$, jež oba působí na $\Lambda^k\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$, který jednou považujeme za $C^k(\mathfrak{m}, \mathbb{W})$ a podruhé za $C_k(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$. Taková dualita by nám umožnila budovat Hodgeovu teorii. K tomu ale na $\Lambda^k\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$ potřebujeme mít pozitivně definitní skalární součin. K jeho definici je možné použít Cartanovu involuci. Je-li $\langle X, Y\rangle$ Cartanova-Killingova forma, pak involuce σ je Cartanovou involucí $\mathfrak{g}$, právě když $\langle\!\langle X, Y\rangle\!\rangle \equiv -\langle X, \sigma(Y)\rangle$ je pozitivně definitní. Cartanovy involuce $\mathfrak{g}$ jsou dány komplexním sdružením vůči nějaké kompaktní reálné formě $\mathfrak{u}$. Pro gradovací element E platí, že $\langle E, E\rangle = 2\sum_{i=1}^k i^2 \dim \mathfrak{g}_k > 0$, neboť $\operatorname{ad} E$ má diagonální akci, jejíž hodnota na $\mathfrak{g}_i$ je i. Musí tedy $\sigma(E) = -E$ a protože $\sigma(E\mathfrak{g}_i) = i\sigma(\mathfrak{g}_i)$ a současně $\sigma(E\mathfrak{g}_i) = \sigma(E)\sigma(\mathfrak{g}_i) = -E\sigma(\mathfrak{g}_i)$, musí být $\sigma(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_{-i}$. Pak ovšem je $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$ ortogonální rozklad vůči $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$, tento skalární součin je pozitivně definitní na $\mathfrak{m}$ i na $\mathfrak{m}^*$ a lze jej pozitivně definitně rozšířit na vnější mocniny. Je výhodné volit duální báze $\{e_i\} \subset \mathfrak{m}$ a $\{\varepsilon^j\} \subset \mathfrak{m}^*$ tak, aby $\sigma(e_i) = \varepsilon^i$. Pak

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \varepsilon^i \wedge (e_i \cdot \beta), \alpha\rangle\!\rangle &= -\langle \varepsilon^i \wedge (e_i \cdot \beta), \sigma(\alpha)\rangle = -\langle e_i \cdot \beta, \varepsilon^i \lrcorner\, \sigma(\alpha)\rangle \\ &= \langle \beta, e_i \cdot \sigma(\sigma(\varepsilon^i) \lrcorner\, \alpha)\rangle = \langle \beta, \sigma(\varepsilon^i \cdot (e_i \lrcorner\, \alpha))\rangle = -\langle\!\langle \beta, \varepsilon^i \cdot (e_i \lrcorner\, \alpha)\rangle\!\rangle\end{aligned}$$

Pozitivně definitní hermitovský skalární součin na $\mathbb{W}$ lze sestrojit díky kompaktnosti $\mathfrak{u}$ a platí pro něj $\langle\!\langle X \cdot w, v\rangle\!\rangle = -\langle\!\langle w, X \cdot v\ \rangle\!\rangle$ pro $X \in \mathfrak{u}$. Pomocí Cartanovy involuce rozšíříme hermiticitu na celé $\mathfrak{g}$: $\langle\!\langle X \cdot w, v\rangle\!\rangle = -\langle\!\langle w, \sigma(X) \cdot v\ \rangle\!\rangle$. Pozitivně definitní skalární součin na celém $\Lambda^k\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$ je definován přirozeně jako $\langle\!\langle \alpha \otimes w, \beta \otimes v\ \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \alpha, \beta\rangle\!\rangle \langle\!\langle w, v\rangle\!\rangle$. Vidíme, že dualitu prvních členů v definici $d_\mathfrak{m}$ a $\delta_{\mathfrak{m}^*}$ už máme dokázánu, v druhých členech stačí

$$\begin{aligned}\langle\!\langle e_i \lrcorner\, \beta \otimes \varepsilon^i \cdot w, \alpha \otimes v\ \rangle\!\rangle &= -\langle e_i \lrcorner\, \beta, \sigma(\alpha)\rangle \langle\!\langle \varepsilon^i \cdot w, v\rangle\!\rangle \\ &= \langle \beta, \sigma(\varepsilon^i \wedge \alpha)\rangle \langle\!\langle w, e_i \cdot v\ \rangle\!\rangle = -\langle\!\langle \beta \otimes w, \varepsilon^i \wedge \alpha \otimes e_i \cdot v\ \rangle\!\rangle\end{aligned}$$

Tedy platí následující věta:

Věta 3.2. *$d_\mathfrak{m} = -(\delta_{\mathfrak{m}^*})^*$ vůči $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$.*

Pokud $\alpha \in \Lambda^p\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$ náleží $\operatorname{Ker} d_\mathfrak{m}$, pak pro všechna $\beta \in \Lambda^{p+1}\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$ platí $\langle\!\langle d_\mathfrak{m}\alpha, \beta\rangle\!\rangle = 0$, tedy $\langle\!\langle \alpha, \delta_{\mathfrak{m}^*}\beta\rangle\!\rangle = 0$ a $\alpha \in (\operatorname{Im} \delta_{\mathfrak{m}^*})^\perp$. Tudíž $\Lambda^p\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W} = \operatorname{Ker} d_\mathfrak{m} \oplus$

$\operatorname{Im}\delta_{\mathfrak{m}^*} = \operatorname{Im} d_{\mathfrak{m}} \oplus (\operatorname{Ker} d_{\mathfrak{m}} \cap \operatorname{Ker}\delta_{\mathfrak{m}^*}) \oplus \operatorname{Im}\delta_{\mathfrak{m}^*}$. Prostřední člen direktní sumy (Hodgeova rozkladu) je roven $\operatorname{Ker}\Box$, kde $\Box = d_{\mathfrak{m}}\delta_{\mathfrak{m}^*} + \delta_{\mathfrak{m}^*}d_{\mathfrak{m}}$ je operátor quabla nebo též laplacián. $\operatorname{Ker}\Box$ je izomorfní jak $H^k(\mathfrak{m}, \mathbb{W})$, tak $H_k(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$, ovšem tento izomorfizmus je pouze izomorfizmem $\mathfrak{g}_0$-modulů, protože $d_{\mathfrak{m}}$ je pouze $\mathfrak{p}^*$-ekvivariantní a $\delta_{\mathfrak{m}^*}$ zase jen $\mathfrak{p}$-ekvivariantní. To je, jak uvidíme, značná nevýhoda z hlediska geometrického, ale reprezentačně teoretická informace nesená Lie-algebraickými homologiemi, jmenovitě váhy ireducibilních komponent $H_k(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$ jako $\mathfrak{g}_0$ modulů, zůstává platnou i v zobecněném případě. Uvažujeme-li prostory řetězců $C_k(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$ jako $\mathfrak{g}_0$-moduly, rozpadají se tyto na součet ireducibilních s vahami ξ_i:

$$C_k(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) = \bigoplus_{\xi_i} C_k(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})^{\xi_i}.$$

Operátory $d_{\mathfrak{m}}$ a $\delta_{\mathfrak{m}^*}$ jsou $\mathfrak{g}_0$-invariantní a tedy $\Box$ působí na každé ireducibilní komponentě jako násobení skalárem. V článku [**Ko61**] je pod číslem 5.7 uvedena tato důležitá věta:

VĚTA 3.3. *Je-li W ireducibilní reprezentace $\mathfrak{g}$ s nejvyšší vahou λ, pak $\Box$ působí na ireducibilní komponentě s vahou ξ jako násobení skalárem*

$$\frac{1}{2}(|\delta + \lambda|^2 - |\delta + \xi|^2), \tag{10}$$

kde váha δ i Cartanova-Killingova forma přísluší algebře $\mathfrak{g}$ a s ξ se zachází také jako s vahou $\mathfrak{g}$, tedy včetně koeficientu nad okřížkovaným kořenem.

Tuto větu by bylo možno použít i pro výpočet reprezentačního typu homologií, stačilo by najít ta ξ, pro něž je $\Box = 0$. Budeme přímočařejší a ocitujeme přímo výsledek z práce [**Sl93**]:

TVRZENÍ 6. *Označme λ nejvyšší váhu ireducibilního $\mathfrak{so}(4,2)$-modulu $\mathbb{W}$ a σ_i reflexi podle i-tého jednoduchého kořene (okřížkovaný počítáme za nultý). Lie-algebraické homologie parabolické podalgebry $\mathfrak{co}(3,1)$ jsou*

$$\begin{aligned}
H_0(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= \lambda\\
H_1(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0\lambda\\
H_2(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0s_1\lambda \oplus s_0s_2\lambda\\
H_3(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0s_1s_2\lambda\\
H_4(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0s_1s_2s_0\lambda,
\end{aligned}$$

kde $s_i\lambda = \sigma_i(\lambda + \delta) - \delta$ je afinní Weylova akce a vahami na pravé straně vždy rozumíme ireducibilní reprezentace dané nejvyšší váhy.

V případě $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2k, 2)$ *jsou homologie*

$$
\begin{aligned}
H_0(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= \lambda \\
H_1(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0\lambda \\
H_2(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0 s_1\lambda \\
&\vdots \\
H_{k-1}(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0 s_1 \dots s_{k-2}\lambda \\
H_k(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0 s_1 \dots s_{k-2} s_{k-1}\lambda \oplus s_0 s_2 \dots s_{k-2} s_k\lambda \\
H_{k+1}(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0 s_1 \dots s_{k-2} s_{k-1} s_k\lambda \\
H_{k+2}(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0 s_1 \dots s_{k-1} s_k s_{s-2}\lambda \\
&\vdots \\
H_{2k-1}(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0 s_1 \dots s_1\lambda \\
H_{2k}(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) &= s_0 s_1 \dots s_1 s_0\lambda,
\end{aligned}
$$

Nejdůležitější zde nejsou přímo váhy jednotlivých reprezentací, ale spíš celkový tvar posloupnosti homologií. Homologické grupy $H_i(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$ jsou jako $\mathfrak{g}_0$-moduly ireducibilní pokud $k \neq i$, v případě $k = i$ se rozpadnou na dvě ireducibilní komponenty. Pokud tedy například nalezneme v rozkladu $\Lambda^k\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$ dvě váhy $\xi_{1,2}$, pro něž $|\delta + \lambda| = |\delta + \xi_i|$, budeme vědět podle věty (3.3), že se vyskytují s v rozkladu homologie, a podle tvrzení (6), že žádné další takové být nemohou.

KAPITOLA 4

Zakřivené BGG posloupnosti

V této kapitole uvádíme některé výsledky článku [**CD99**] spolu s podrobným odůvodněním. Vycházíme z konceptu tzv. Cartanových geometrií, které tvoří jednotný matematický rámec pro dva směry zobecnění klasické Eukleidovské geometrie – na jedné straně Kleinův Erlangenský program, na druhé Riemannova geometrie. Klein klasifikuje geometrie globálně pomocí jejich grupy automorfizmů a její podgrupy fixující vybraný bod. Riemannova geometrie stojí na pojmu variety, geometrické struktury slepené z mnoha otevřených množin, každá s Eukleidovskou geometrií. Základní myšlenka Cartanových geometrií spočívá v nalezení lokální formy popisu geometrie pomocí grupy automorfizmů a její podgrupy, k čemuž se používá aparátu fíbrovaných prostorů. Podrobně se lze o Cartanových geometriích dočíst například v knize [**Sh97**].

Hlavním výsledkem kapitoly je věta 3.2, která formuluje existenci zakřivených BGG posloupností a multiplikativní struktury na nich, a také definice 21 a navazující tvrzení 8, v nichž leží těžiště informace o konstrukci operátorů a párování v těchto BGG posloupnostech.

1. Cartanovy geometrie a invariantní diferencování

Definice 12 (*Maurer-Cartanova forma*). Nechť G je Lieova grupa, $\mathfrak{g} \equiv T_eG$ její Lieova algebra. Levá Maurer-Cartanova forma je lineární forma $\omega \in \Lambda^1(G, \mathfrak{g})$ daná pro $\xi \in T_gG$ předpisem $\omega(\xi) = l_{g^{-1}*}(\xi)$.

Definice 13 (*Fundamentální vektorové pole*). Nechť $\mathcal{G} \to M$ je hlavní fíbrovaný prostor s grupou P, $X \in P$, pak fundamentálním vektorovým polem příslušejícím X rozumíme pole $\xi_X = \big(u, \frac{d}{dt}|_{t=0} u \ \exp(tX)\big)$, $u \in \mathcal{G}$.

Lemma 10. *MC-forma ω na homogenním prostoru $G \to G/P$ je P-ekvivariantní a platí $\omega(\xi_X) = X$ pro ξ_X fundamentální vektorové pole příslušející $X \in P$.*

DŮKAZ. P-ekvivariance značí, že $\forall p \in P, u \in \mathcal{G}$ a $\forall \xi \in T_u G$ platí $[(r_p)^*\omega](\xi) = [\mathrm{Ad}(p^{-1})]\,\omega(\xi)$. To ověříme takto:

$$[(r_p)^*\omega](\xi) = \omega((r_p)_*\xi) = l_{(up)^{-1}*} r_{p*}\xi = \\ = l_{p^{-1}*} l_{u^{-1}*} r_{p*}\xi = l_{p^{-1}*} r_{p*}\omega(\xi) = \left[\mathrm{Ad}\left(p^{-1}\right)\right]\omega(\xi)$$

Druhá část tvrzení je jednoduchým použitím definic:

$$\omega\left(\tfrac{d}{dt}|_{t=0} u \ \exp(tX)\right) = \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tX) = X$$

$\square$

DEFINICE 14 (*Cartanova geometrie*). P-ekvivariantní 1-formu η na hlavním fíbrovaném prostoru $\mathcal{G} \to M$ se strukturní grupou P s hodnotami v Lieově algebře $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{p}$ takové, že $\dim M = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, pro niž $\forall X \in \mathfrak{p}$ platí $\eta(\xi_X) = X$ a $\forall u \in \mathcal{G}$ je η_u izomorfizmus vektorových prostorů $T_u\mathcal{G}$ a $\mathfrak{g}$, nazýváme Cartanovou konexí. Dvojici $(\mathcal{G}, \eta)$ nazýváme Cartanova geometrie.

POZNÁMKA 1. K libovolné reprezentaci $\mathbb{E}$ grupy P existuje asociovaný fíbrovaný prostor $E = \mathcal{G} \times_P \mathbb{E}$. Příkladem může být $TM = \mathcal{G} \times_P \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ (viz níže) nebo tzv. *adjungovaný bandl* $\mathfrak{g}_M = \mathcal{G} \times_P \mathfrak{g}$. Přirozená projekce indukuje surjektivní zobrazení $\pi_g : \mathfrak{g}_M \to TM$. Řezy $\Gamma(M, E)$ lze identifikovat s hladkými ekvivariantními zobrazeními $C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{E})^P = \{f : \mathcal{G} \to \mathbb{E} | (\forall p \in P)(\forall u \in \mathcal{G})\, p \cdot f(up) = f(u)\}$

Izomorfizmus TM a $\mathcal{G} \times_P \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ nám pomůže nalézt následující diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & T_u\pi^{-1}(\pi(u)) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_P"', "\simeq"] & T_u\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\eta"', "\simeq"] & T_{\pi(u)}M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_u"', "\simeq"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{p} \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\rho"] & \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Horní i spodní posloupnost je exaktní a první dvě zobrazení jsou izomorfizmy podle definice, existuje tedy izomorfizmus $\varphi_u : T_{\pi(u)}M \to \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Musíme ještě ukázat, že tento izomorfizmus je zobrazením fíbrovaných prostorů. Pro $T_{\pi(u)}M \ni v = \pi_{*u}(w) = \pi_{*up}(r_{p*}w)$ dostáváme

$$\varphi_{up}(v) = \varphi_{up}(\pi_{*up}(r_{p*}w)) = \rho(\eta_{up}(r_{p*}w)) = \rho(\mathrm{Ad}(p^{-1})\eta_u(w)) = \\ = \mathrm{Ad}(p^{-1})\rho(\eta_u(w)) = \mathrm{Ad}(p^{-1})\varphi_u(\pi_{*u}(w)) = \mathrm{Ad}(p^{-1})\varphi_u(v)$$

Zobrazení $q : \mathcal{G} \times \mathfrak{g} \to TM$, $q(u,t) = (\pi(u), \varphi_u^{-1}(\rho(t)))$ indukuje zobrazení $\bar{q}$: $\mathcal{G} \times_P \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \to TM$, neboť

$$q(up, \mathrm{Ad}(p^{-1})t) = \big(\pi(up), \varphi_{up}^{-1}(\rho(\mathrm{Ad}(p^{-1})t))\big) =$$
$$= \big(\pi(u), (\mathrm{Ad}(p)\varphi_{up})^{-1}(\rho(t))\big) = \big(\pi(u), \varphi_u^{-1}(\rho(t))\big) = q(u,t).$$

Dostali jsme tedy zobrazení fíbrovaných prostorů, které dává identitu na bázi M a izomorfizmus fíbrů.

Definice 15. *Křivost* Cartanovy konexe $K : \Lambda^2 T\mathcal{G} \to \mathfrak{g}$ definujeme $\forall U, V \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$ vektorová pole vztahem

$$K(U,V) = d\eta(U,V) + [\eta(U), \eta(V)]$$

Poznámka 2. Závorku dvou forem s hodnotami v Lieově algebře $\omega = \alpha \otimes u \in \Lambda^p T^*\mathcal{G} \otimes \mathfrak{g}$, $\eta = \beta \otimes v \in \Lambda^q T^*\mathcal{G} \otimes \mathfrak{g}$ definujeme jako $[\omega, \eta] = (\alpha \wedge \beta) \otimes [u, v]$. Vnější součin 1-forem je definován pro libovolné vektory (vektorová pole) $[\alpha \wedge \beta](U,V) = \alpha(U)\beta(V) - \alpha(V)\beta(U)$. V našem případě je součinem závorka Lieovy algebry, tedy

$$[\eta, \eta](U,V) = [\eta(U), \eta(V)] - [\eta(V), \eta(U)] = 2[\eta(U), \eta(V)],$$

což osvětluje často vídaný vztah $K = d\eta + \frac{1}{2}[\eta, \eta]$.

Pomocí Cartanovy konexe lze přidružit ke křivosti funkci $\kappa : \mathcal{G} \to \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ vztahem $\kappa(u)(X,Y) = K_u(\eta_u^{-1}(X), \eta_u^{-1}(Y))$, kde $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Lemma 11.

$$\kappa(u)(X,Y) = [X,Y] - \eta_u[\eta_u^{-1}(X), \eta_u^{-1}(Y)]$$

Důkaz. Z definice diferenciálu 1-formy plyne

$$\begin{aligned}
\kappa(X,Y) &= d\eta(\eta^{-1}(X), \eta^{-1}(Y)) + \left[\eta\left(\eta^{-1}(X)\right), \eta\left(\eta^{-1}(Y)\right)\right] \\
&= \eta^{-1}(X)\left(\eta\left(\eta^{-1}(Y)\right)\right) - \eta^{-1}(Y)\left(\eta\left(\eta^{-1}(X)\right)\right) - \\
&\quad - \eta\left([\eta^{-1}(X), \eta^{-1}(Y)]\right) + \left[\eta\left(\eta^{-1}(X)\right), \eta\left(\eta^{-1}(Y)\right)\right] \\
&= [X,Y] - \eta\left([\eta^{-1}(X), \eta^{-1}(Y)]\right)
\end{aligned}$$

První dva členy vypadnou, neboť se jedná o diferencování konstantního, na bodě u nezávislého výrazu. □

Poznámka 3. Pro Maurer-Cartanovu formu $K = 0$, neboť $\eta^{-1}(X)$ je levoinvariantní vektorové pole a tedy $\eta^{-1}[X,Y] = [\eta^{-1}(X), \eta^{-1}(Y)]$.

Definice 16 (*Invariantní derivace*). Invariantní derivace je zobrazení

$$\nabla^\eta : C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{E}) \to C^\infty(\mathcal{G}, \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{E})$$

definované $\forall X \in \mathfrak{g}$ vztahem

$$\nabla^\eta(f)(X) = df(\eta^{-1}(X)) \equiv \eta^{-1}(X) f$$

Lemma 12. *Invariantní derivace je ekvivariantní, lze ji tedy brát jako zobrazení* $\nabla^\eta : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, \mathfrak{g}_M^* \otimes E)$

Důkaz. Pro $p \in P$, $u \in \mathcal{G}$, $X \in \mathfrak{g}$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{E})^P$ platí

$$\begin{aligned} p \cdot (\eta^{-1}(\mathrm{Ad}(p^{-1})X)f)(up) &= p \cdot \frac{d}{dt}|_{t=0} f(up \exp(t\,\mathrm{Ad}(p^{-1})X)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} p \cdot f(u \exp(tX)p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(u \ \exp(tX)) = (\eta^{-1}(X)f)(u). \end{aligned}$$

Invariantní derivace tedy není derivací kovariantní, obrazem řezu není opět řez (prvek $\Gamma(M, E)$), protože ekvivariance se týká i formové části. ☐

Poznámka 4. Ekvivariance η znamená, že $\eta^{-1} : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(\mathcal{G})$ je *splétající zobrazení* pro přirozené akce P na $\mathfrak{g}$ (tam je to Ad) a na $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ (tam je to r_{p*}), aneb $r_{p*}(\eta^{-1}(X)) = \eta^{-1}(\mathrm{Ad}(p^{-1})(X))$. Snadno se o tom přesvědčíme dosazením levoinvariantního vektorového pole $\eta^{-1}(X)$:

$$\mathrm{Ad}(p^{-1})(X) = (r_p^*\eta)(\eta^{-1}(X)) = \eta(r_{p*}(\eta^{-1}(X)))$$

Pokud $\mathcal{G} = G$, pak je η^{-1} splétající pro celou grupu G.

Poznámka 5. Dokázali jsme, že existuje projekce $\mathfrak{g}_M \to TM$. Duálně existuje vnoření $T^*M \to \mathfrak{g}_M^*$.

Tvrzení 7.

1. *Křivost Cartanovy konexe je horizontální 2-forma a tedy indukuje 2-formu* $K_M \in C^\infty(M, \Lambda^2 T^*M \otimes \mathfrak{g}_M)$. *Ekvivalentně* $\forall \xi \in \mathfrak{p}$ *je* $\kappa(\xi, \cdot) = 0$, *z čehož plyne* $\kappa \in C^\infty(\mathcal{G}, \Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g})^P$.
2. *Je-li* $f : \mathcal{G} \to \mathbb{E}$ P*-ekvivariantní, pak* f *je vertikálně triviální ve smyslu* $(\nabla_\xi^\eta f)(u) + \xi \cdot f(u) = 0$. *Pro triviální reprezentaci* $\mathbb{E}$ *je* $\nabla^\eta f = df \circ \pi_g$.
3. $f_1 : \mathcal{G} \to \mathbb{E}_1$, $f_2 : \mathcal{G} \to \mathbb{E}_2 \Leftrightarrow \nabla_\xi^\eta(f_1 \otimes f_2) = \nabla_\xi^\eta f_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes \nabla_\xi^\eta f_2$
4. $f \in C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{E})$, *pak* $\forall \xi, \chi \in \mathfrak{g}$ *platí tzv. Ricciho identita:*

$$\nabla_\xi^\eta(\nabla_\chi^\eta f) - \nabla_\chi^\eta(\nabla_\xi^\eta f) = \nabla_{[\xi,\chi]}^\eta f - \nabla_{\kappa(\xi,\chi)}^\eta f$$

5. *Zobrazení* $C^\infty(M,E) \to C^\infty(M, E \oplus (\mathfrak{g}^*_M \otimes E))$ *posílající* s *na* $(s, \nabla^\eta s)$ *indukuje injektivní zobrazení fíbrovaných prostorů* $J^1(E) \to E \oplus (\mathfrak{g}^*_M \otimes E)$, *jehož obrazem je* $\mathcal{G} \times_P J^1_0(\mathbb{E})$, *kde*

$$J^1_0(\mathbb{E}) = \{(\phi_0, \phi_1) \in \mathbb{E} \oplus (\mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{E}) | (\forall \xi \in \mathfrak{p})\, \phi_1(\xi) + \xi\phi_0 = 0\}$$

Důkaz.

1. Nechť $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{p}$. η^{-1} je splétající zobrazení, tedy

$$\mathrm{Ad}_{e^{tY}}(X) = \eta_u\left(r_{e^{-tY}*}\left(\eta^{-1}_{ue^{tY}}(X)\right)\right)$$

Toto zderivujme podle t a dosaďme $t = 0$. Z levé strany se stane $\mathrm{ad}_Y(X) = [Y, X]$, pravá přejde na $\eta_u[\eta^{-1}(Y), \eta^{-1}(X)]$, neboť vnitřní (na t závislý) výraz je stejný jako v definici Lieovy derivace vektorového pole. Tedy $\kappa(Y, X) = 0$.
2. Nechť $\xi \in \mathfrak{p}$, podmínku ekvivariance lze pak psát $e^{t\xi} \cdot f(ue^{t\xi}) = f(u)$. Derivace v nule je $\xi \cdot f(u) + \eta^{-1}(\xi) f(u) = 0$, což je přesně dokazované tvrzení.
3. Jedná se pouze o Leibnizovo pravidlo pro vnější diferenciál $d(f_1 \otimes f_2) = df_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes df_2$, do nějž je dosazeno vektorové pole $\eta^{-1}(X)$.
4.

$$\begin{aligned}\eta^{-1}(\xi)(\eta^{-1}(\chi)f) - \eta^{-1}(\chi)(\eta^{-1}(\xi)f) &= df([\eta^{-1}(\xi), \eta^{-1}(\chi)]) \\ &= df\left(\eta^{-1}([\xi,\chi]) - \eta^{-1}(\kappa(u)(\xi,\chi))\right)\end{aligned}$$

5. Pro první jetové prodloužení $J_1(E)$ platí, že každý diferenciální operátor prvého řádu $D : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ lze psát jako složení diferenciálního vložení $j^1 : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M, J^1(E))$ s jednoznačně určeným homomorfizmem $\phi : J^1(E) \to F$. Uvažme následující diagram:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M,E) & \xrightarrow{\nabla^\eta} & C^\infty(M, \mathfrak{g}^*_M \otimes E) \\ {\scriptstyle\theta}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\phi} \\ C^\infty(M, T^*M \otimes E) & \xrightarrow{i} & C^\infty(M, J^1(E)) \end{array}$$

Zde levá a spodní šipka jsou rozepsáním j^1 do složení zobrazení θ, které řezu přiřazuje jeho diferenciál, a i, což je vnoření $T^*M \otimes E$ do $J^1(E)$. Zvolme element $C^\infty(M,E)$ ve tvaru součinu $s \in C^\infty(M,E)$ a $f \in C^\infty(M,\mathbb{C})$. Volme jej tak, aby v daném bodě p platilo $f(p) = 0$, df se rovnalo nějaké předepsané 1-formě $\alpha \in T^*_pM$ a $s(p)$ se rovnalo předepsanému $u \in \mathbb{E}$. Podle Leibnizova pravidla $\nabla^\eta(fs) = df \otimes s\ + f \otimes \nabla^\eta s\ = \alpha \otimes u$. Odtud je vidět, že zobrazení

$i \circ \phi$ (symbol operátoru ∇^η) je identita a ϕ je prosté. Direktní součet s projekcí $J^1(E)$ na E dává prosté zobrazení $J^1(E) \to E \oplus (\mathfrak{g}_M^* \otimes E)$, neboť pro konstantní složku v E se toto zobrazení redukuje právě na ϕ. Rank $J^1(E)$ je $\dim \mathbb{E} + \dim M. \dim \mathbb{E}$ a stejně tak i rank $J^1_0(\mathbb{E})$, protože každá $\mathbb{E}$-složka ϕ_1 je zde svázána $\dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{g} - \dim M$ podmínkami a celé je to vnořeno v prostoru ranku $\dim \mathbb{E} + \dim \mathfrak{g}. \dim \mathbb{E}$. Splnění podmínek je zřejmé z vertikální triviality. Tedy získaná injekce je izomorfizmem na $J^1_0(\mathbb{E})$.

□

Definice 17. *Torze* Cartanovy konexe je $C^\infty(M, \Lambda^2 T^*M \otimes TM) \ni T = \pi_g(K_M)$, kde π_g je projekce z poznámky 1.

Poznámka 6. Cartanova geometrie je beztorzní, právě když κ nabývá hodnot v $\mathfrak{p}$. Pro $f \in C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{E})^P$ pak $\nabla^\eta_{\kappa(\xi,\chi)} f = -\kappa(\xi, \chi) \cdot f$.

Definice 18 (*Twistorová konexe*). Nechť $\mathbb{W}$ je G-modul (nebo $(\mathfrak{g}, P)$-modul, nebudeme rozlišovat), pak zobrazení $\nabla^\mathfrak{g} : C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{W}) \to C^\infty(\mathcal{G}, \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{W})$, $\nabla^\mathfrak{g}_\xi f = \nabla^\eta_\xi f + \xi \cdot f$ pro $\xi \in \mathfrak{g}$ nazýváme twistorovou konexí.

Poznámka 7. Pro f P-ekvivariantní nabývá $\nabla^\mathfrak{g} f$ hodnoty v $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathbb{W}$, tedy indukuje na $\mathcal{G} \otimes_P \mathbb{W}$ kovariantní derivaci. Ukazuje se, že je to asociovaná kovariantní derivace ke konexi $\tilde{\eta}$ na hlavním fíbrovaném prostoru $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \times_P G$, která je indukovaná Cartanovou konexí η na $\mathcal{G}$.

Lemma 13. *Buď $\Psi_\mathbb{W}$ P-ekvivariantní automorfizmus $(\mathbb{E} \otimes \mathbb{W}) \oplus (\mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbb{W})$ daný $\Psi_\mathbb{W}(\phi_0 = e \otimes w, \phi_1) = (\phi_0, \tilde{\phi}_1)$, přičemž $\mathbb{E}$ je P-modul a $\mathbb{W}$ G-modul a $\tilde{\phi}_1(\chi) = \phi_1(\chi) + e \otimes \chi \cdot w$ pro všechna $\chi \in \mathfrak{g}$. Pak $\Psi_\mathbb{W}$ je izomorfizmus $J^1_0(\mathbb{E} \otimes \mathbb{W})$ do $J^1_0(\mathbb{E}) \otimes \mathbb{W}$.*

Důkaz. Pro $\chi \in \mathfrak{p}$ platí

$$\tilde{\phi}_1(\chi) + (\chi \cdot e) \otimes w = \phi_1(\chi) + (\chi \cdot e) \otimes w + e \otimes (\chi \cdot w) = \phi_1(\chi) + \chi \cdot (e \otimes w) = 0$$

□

Definice 19 (*Parabolická geometrie*). Cartanova geometrie se nazývá parabolickou, pokud $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ je parabolická podalgebra. Parabolická geometrie je *abelovská* nebo též *skoro Hermitovská symetrická*, pokud $\mathfrak{m}$ je abelovská. Parabolická geometrie je *semiregulární*, pokud jsou geometrické váhy křivosti nezáporné, *regulární*, pokud jsou kladné, a *normální*, pokud $\delta_{\mathfrak{m}^*} \kappa = 0$.

2. Twistované de Rhamovy posloupnosti

V sekci o Lie-algebraické homologii jsme dokázali dualitu dvou operátorů na $\Lambda^k\mathfrak{m}^*\otimes\mathbb{W}$. Operátor $\delta_{\mathfrak{m}^*}$ je $\mathfrak{p}$-ekvivariantní, indukuje tedy kodiferenciál δ_{T^*M} na $\Lambda^kT^*M\otimes W$, což je totéž jako $\mathcal{G}\times_P(\Lambda^k\mathfrak{m}^*\otimes\mathbb{W})$, viz poznámku 1. Operátor $d_\mathfrak{m}$ ovšem $\mathfrak{p}$-ekvivariantní není a musíme se za něj pokusit najít nějakou náhradu. Za tímto účelem budeme twistovat standardní de Rhamovu posloupnost modulem $\mathbb{W}$.

De Rhamova posloupnost je komplex, v němž řetězci jsou Λ^kT^*M a mezi nimi je definován vnější diferenciál $d:\Lambda^kT^*M\to\Lambda^{k+1}T^*M$. Projekce definující fíbrovaný prostor $p:\mathcal{G}\to M$ identifikuje pomocí sobě příslušného kotečného zobrazení element α prostoru Λ^kT^*M s horizontální P-ekvivariantní formou $\tilde\alpha=p^*\alpha$ na celém $\mathcal{G}$. Vnější diferenciál komutuje s pullbackem, můžeme jej tedy vyjádřit v termínech forem na $\mathcal{G}$. Ty lze ještě pomocí Cartanovy konexe $\eta:T\mathcal{G}\to\mathfrak{g}$ identifikovat s prvky $C^\infty(\mathcal{G},\Lambda^k\mathfrak{m}^*)^P$ vztahem $\bar\alpha(\xi_1,\dots,\xi_k)=\tilde\alpha(\tilde\xi_1,\dots,\tilde\xi_k)$, kde $\xi\in\mathfrak{m}$ a $\tilde\xi_i=\eta^{-1}(\xi_i)$. Podle definice vnějšího diferenciálu

$$
\begin{aligned}
&\overline{d\alpha}(\xi_0,\dots,\xi_k)\\
&=\sum_i(-)^i\tilde\xi_i\tilde\alpha(\tilde\xi_0,\dots,\hat{\tilde\xi}_i,\dots\tilde\xi_k)+\sum_{i<j}(-)^{i+j}\tilde\alpha([\tilde\xi_i,\tilde\xi_j],\tilde\xi_0,\dots,\hat{\tilde\xi}_i,\dots,\hat{\tilde\xi}_j,\dots,\tilde\xi_k)\\
&=\sum_i(-)^i\nabla^\eta_{\xi_i}\bar\alpha(\xi_0,\dots,\hat\xi_i,\dots\xi_k)+\sum_{i<j}(-)^{i+j}\bar\alpha(\eta[\tilde\xi_i,\tilde\xi_j],\dots,\hat\xi_i,\dots,\hat\xi_j,\dots,\xi_k)\\
&=\sum_{k,i}(-)^i\varepsilon^k(\xi_i)\nabla^\eta_{e_k}\bar\alpha(\xi_0,\dots,\hat\xi_i,\dots\xi_k)-\sum_{i<j}(-)^{i+j}\bar\alpha(\kappa(\xi_i,\xi_j),\dots,\hat\xi_i,\dots,\hat\xi_j,\dots,\xi_k)\\
&\qquad+\sum_{i<j}(-)^{i+j}\bar\alpha([\xi_i,\xi_j],\dots,\hat\xi_i,\dots,\hat\xi_j,\dots,\xi_k)
\end{aligned}
$$

K úpravám se budou hodit dvě lemmata:

LEMMA 14. *Nechť $\beta\in\mathfrak{m}^*$, $\xi_i,\xi_j\in\mathfrak{m}$, pak $\beta([\xi_i,\xi_j])=[\xi_j,\beta]_{\mathfrak{m}^*}(\xi_i)$*

DŮKAZ.

$$\beta([\xi_i,\xi_j])=\langle[\xi_i,\xi_j],\beta\rangle=\langle\xi_i,[\xi_j,\beta]\rangle=\langle[\xi_j,\beta]_{\mathfrak{m}^*},\xi_i\rangle=[\xi_j,\beta]_{\mathfrak{m}^*}(\xi_i)$$

□

LEMMA 15. *Nechť* $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathfrak{m}^*, \xi_1, \dots \xi_k \in \mathfrak{m}$, *pak*

$$(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_k)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{s=1}^{k} (-)^{s+t} \beta_s(\xi_t)(\beta_1 \wedge \dots \hat{\beta}_s \dots \wedge \beta_k)(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_t, \dots, \xi_k)$$

DŮKAZ. Stačí si uvědomit, že levá strana rovnice je dle definice rovna $\det \beta_i(\xi_j)$ a pravá strana je pak pouze rozvojem determinantu podle sloupce. □

První člen je tedy podle druhého lemmatu roven $\sum_k \varepsilon^k \wedge \nabla^{\eta}_{e_k} \bar{\alpha}$ vyčíslenému v argumentech $(\xi_0, \dots, \xi_k)$. Analogickou úpravou rozeznáme v druhém členu $\sum_{k<l} \varepsilon^k \wedge \varepsilon^l \wedge (\kappa(e_i, e_j) \lrcorner \bar{\alpha})$ (taktéž vyčísleno na $\xi_0, \dots \xi_k$), přičemž projekci na M můžeme provést díky horizontalitě $\tilde{\alpha}$. Nyní nechť je $\bar{\alpha} \in \Lambda^k \mathfrak{m}^*$ totálně rozložitelná, pak můžeme třetí člen upravovat

$$\begin{aligned}
&\sum_{i<j} (-)^{i+j} \bar{\alpha}([\xi_i, \xi_j], \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_{i<j} \sum_{s} (-)^{i+j} (-)^{s+1} \bar{\alpha}_s[\xi_i, \xi_j] (\bar{\alpha}_1 \wedge \dots \hat{\bar{\alpha}}_s \dots \wedge \bar{\alpha}_k)(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_s \Bigg(\frac{1}{2} \sum_{i<j} (-)^{i+j+s+1} [\xi_j, \bar{\alpha}_s]_{\mathfrak{m}^*}(\xi_i) (\bar{\alpha}_1 \wedge \dots \hat{\bar{\alpha}}_s \dots \wedge \bar{\alpha}_k)(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j<i} (-)^{i+j+s} [\xi_j, \bar{\alpha}_s]_{\mathfrak{m}^*}(\xi_i) (\bar{\alpha}_1 \wedge \dots \hat{\bar{\alpha}}_s \dots \wedge \bar{\alpha}_k)(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k) \Bigg) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,s} (-)^j (\bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge [\xi_j, \bar{\alpha}_s]_{\mathfrak{m}^*} \wedge \dots \wedge \bar{\alpha}_k)(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_k) = \frac{1}{2} \sum_k \varepsilon^k \wedge (e_k \cdot \bar{\alpha}).
\end{aligned}$$

V prvním kroku jsme použili druhé lemma, ve druhém jsme psali sumu jako součet dvou stejných výrazů a v jednom jsme s využitím antisymetrie komutátoru zaměnili sčítací indexy. Současně jsme hned použili prvního lemmatu. V třetím kroku jsme použili opět druhé lemma (v úloze s a t vystupují i a s), čímž se obě sumy znovu sloučily. Poslední úprava spočívá v rozepsání ξ_j do báze a použití definice akce $\mathfrak{m}$ na $\mathfrak{m}^*$. Shrňme:

LEMMA 16. *Nechť* $\alpha \in \Lambda^k T^* M$, *potom*

$$\overline{d\alpha} = \sum_i \varepsilon^i \wedge \nabla^{\eta}_{e_i} \bar{\alpha} - \sum_{i<j} \varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \wedge (\kappa(e_i, e_j) \lrcorner \bar{\alpha}) + \frac{1}{2} \sum_i \varepsilon^i \wedge (e_i \cdot \bar{\alpha})$$

Tvrzení 7 ve svém pátém bodě aplikovaném na $\mathbb{E} = \Lambda^k \mathfrak{m}^*$ dává izomorfizmus $J^1(\mathcal{G} \times_P \Lambda^k \mathfrak{m}^*)$ a $\mathcal{G} \times_P J^1_0(\Lambda^k \mathfrak{m}^*)$. Tento fíbrovaný prostor je pak vnější derivací zobrazen do $\mathcal{G} \times_P \Lambda^{k+1}\mathfrak{m}^*$, předpis pro to udává právě dokázané lemma. Pokud na začátku vezmeme za $\mathbb{E}$ prostor $\Lambda^k\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$, musíme ještě využít izomorfizmu $\Psi_{\mathbb{W}} : J^1_0(\Lambda^k\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}) \to J^1_0(\Lambda^k\mathfrak{m}^*) \otimes \mathbb{W}$ z lemmatu 13. Označíme-li element prvního prostoru $(\bar{\alpha} \otimes w, \phi_1)$, máme zobrazení

$$\begin{aligned}(\bar{\alpha} \otimes w, \phi_1) \to \sum_i \varepsilon^i \wedge \tilde{\phi}(e_i) - \sum_{i<j} (\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \wedge (\kappa(e_i, e_j) \lrcorner \bar{\alpha})) \otimes w \\ + \frac{1}{2} \sum_i (\varepsilon^i \wedge e_i \cdot \bar{\alpha}) \otimes w \\ = \sum_i \varepsilon^i \wedge \phi_1(e_i) + \sum_i \varepsilon^i \wedge \bar{\alpha} \otimes e_i \cdot w \\ - \sum_{i<j} (\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \wedge (\kappa(e_i, e_j) \lrcorner \bar{\alpha})) \otimes w + \frac{1}{2} \sum_i (\varepsilon^i \wedge e_i \cdot \bar{\alpha}) \otimes w \\ = \sum_i \varepsilon^i \wedge \phi_1(e_i) + d_{\mathfrak{m}}(\bar{\alpha} \otimes w) - \sum_{i<j} (\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \wedge (\kappa(e_i, e_j) \lrcorner \bar{\alpha})) \otimes w\end{aligned}$$

Toto je algebraický homomorfizmus $\sigma(d^{\mathfrak{g}})$, jehož analogon byl označen v důkazu páté části tvrzení 7 jako ϕ. Je symbolem diferenciálního operátoru $d^{\mathfrak{g}}$. Protože poslední člen v $\sigma(d^{\mathfrak{g}})$ je $\mathfrak{p}$-ekvivariantní (díky $\mathfrak{p}$-ekvivarianci invariantní derivace má stejnou vlastnost i křivost), dostáváme jeho vynecháním dalšího kandidáta na vhodnou náhradu za $d_{\mathfrak{m}}$, označme jej d^{η}.

VĚTA 2.1. *Nechť $\{\chi_i\}$ je báze $\mathfrak{g}$, $\{\zeta^i\}$ k ní duální báze $\mathfrak{g}^*$. Pro křivosti $R^{\mathfrak{g}} = (d^{\mathfrak{g}})^2$, $R^{\eta} = (d^{\eta})^2 \in \Lambda^2 T^*M \otimes \operatorname{End} W$ platí*

$$\begin{aligned} R^{\mathfrak{g}} s &= \sum_i \langle \zeta^i, \kappa \rangle \wedge \chi_i \cdot s \\ R^{\eta} s &= - \sum_i \langle \zeta^i, \kappa \rangle \wedge \nabla^{\eta}_{\chi_i} s, \end{aligned}$$

přičemž v prvním řádku rozumíme pod akcí χ_i akci na $\mathbb{W}$-složce s.

DŮKAZ. Pro důkaz prvního tvrzení si uvědomme, že twistování de Rhamova diferenciálu jsme prováděli tak, aby $d^{\mathfrak{g}}(\alpha \otimes w) = d\alpha \otimes w + \sum_i \varepsilon^i \wedge \alpha \otimes e_i \cdot w$, kde $\{\varepsilon^i\}$ je báze T^*M a $\{e_i\}$ báze TM k ní duální. Potom

$$\begin{aligned}(d^{\mathfrak{g}})^2 (\alpha \otimes w) = d^{\mathfrak{g}}(d\alpha \otimes w) + \sum_i \varepsilon^i \wedge \alpha \otimes e_i \cdot w \\ = d^2\alpha \otimes w + \sum_i d(\varepsilon^i \wedge \alpha) \otimes e_i \cdot w + \sum_j \varepsilon^j \wedge d\alpha \otimes e_j \cdot w + \sum_{i,j} \varepsilon^j \wedge \varepsilon^i \wedge \alpha \otimes e_j \cdot e_i \cdot w.\end{aligned}$$

První člen vypadne, pro obyčejný de Rhamův diferenciál je $d^2 = 0$. V druhém členu překomutujeme d přes ε^i, neboť ε^i je souřadnicová 1-forma. Zbylý člen z Leibnizova pravidla se zruší se třetím členem výše uvedeného výrazu. Čtvrtý člen lze upravit na

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\varepsilon^j \wedge \varepsilon^i \wedge \alpha \otimes [e_j, e_i] \cdot w = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l}\langle \zeta^l, [e_j, e_i]\rangle \varepsilon^j \wedge \varepsilon^i \wedge \alpha \otimes \chi_l \cdot w$$

přičemž závorkou zde myslíme komutátor Lieovy algebry. Víme, že $\kappa(e_j, e_i) = [e_j, e_i] - \eta_u[\eta^{-1}(e_j), \eta^{-1}(e_i)]$, kde ovšem druhý člen zahrnuje závorku dvou souřadnicových vektorových polí, která je nulová. Odtud již tvrzení ihned plyne, když vezmeme v potaz, že $\kappa = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\varepsilon^j \wedge \varepsilon^i \kappa(e_j, e_i)$.

K důkazu druhého tvrzení se hodí následující lemma:

LEMMA 17. *Nechť* $\alpha \in \mathfrak{m}^*, s \in \Lambda^k\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$. *Pak*

$$d_{\mathfrak{m}}(\alpha \wedge s) + \alpha \wedge (d_{\mathfrak{m}} s) = \sum_i \frac{1}{2}\varepsilon^i \wedge [e_i, \alpha]_{\mathfrak{m}^*} \wedge s$$

DŮKAZ LEMMATU. Uvažme $s = \beta \otimes w$.

$$d_{\mathfrak{m}}(\alpha \wedge \beta \otimes w) = \sum_i \frac{1}{2}\varepsilon^i \wedge e_i \cdot (\alpha \wedge \beta) \otimes w + \varepsilon^i \wedge \alpha \wedge \beta \otimes e_i \cdot w$$

$$\alpha \wedge d_{\mathfrak{m}}(\beta \otimes w) = \sum_i \frac{1}{2}\alpha \wedge \varepsilon^i \wedge (e_i \cdot \beta) \otimes w + \alpha \wedge \varepsilon^i \wedge \beta \otimes e_i \cdot w$$

Když tyto dva výrazy sečteme, druhé členy se navzájem zruší. Obdobného efektu dosáhneme v prvních členech použitím identity

$$e_i \cdot (\alpha \wedge \beta) = [e_i, \alpha]_{\mathfrak{m}^*} \wedge \beta + \alpha \wedge (e_i \cdot \beta).$$

Vidíme též, že zbylý člen odpovídá pravé straně tvrzení lemmatu, čímž je toto dokázáno. □

Nyní přistupme k přímému výpočtu $(d^\eta)^2$.

$$d^\eta(d^\eta s) = (d_{\mathfrak{m}})^2 s + d_{\mathfrak{m}}\left(\sum_i \varepsilon^i \wedge \nabla^\eta_{e_i} s\right) + \sum_i \varepsilon^i \wedge \nabla^\eta_{e_i}\left(d_{\mathfrak{m}} s + \sum_j \varepsilon^j \wedge \nabla^\eta_{e_j} s\right)$$

$$= d_{\mathfrak{m}}\left(\sum_i \varepsilon^i \wedge \nabla^\eta_{e_i} s\right) + \sum_i \varepsilon^i \wedge d_{\mathfrak{m}} \nabla^\eta_{e_i} s + \sum_{i,j} \varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \wedge \nabla^\eta_{e_i}\nabla^\eta_{e_j} s$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} \varepsilon^j \wedge [e_j, \varepsilon^i]_{\mathfrak{m}^*} \wedge \nabla^\eta_{e_i} s + \varepsilon^j \wedge \varepsilon^i \wedge \left(\nabla^\eta_{e_j}\nabla^\eta_{e_i} - \nabla^\eta_{e_i}\nabla^\eta_{e_j} s\right)\right)$$

V druhém kroku jsme považovali bázové elementy ε^i, e_i za konstantní pole, takže bylo možné prokomutovat derivaci přes algebraický diferenciál $d_{\mathfrak{m}}$. Ve třetím kroku jsme využili lemma. První člen v závorce upravíme pomocí invariance Cartan-Killingovy formy:

$$\sum_k \langle [e_j, \varepsilon^i]_{\mathfrak{m}^*}, e_k\rangle \varepsilon^k = \sum_k \langle \varepsilon^i, [e_k, e_j]\rangle \varepsilon^k$$

Rýsuje se nám tedy možnost použití Ricciho identity, čímž konečně dostáváme

$$(d^\eta)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \varepsilon^j \wedge \varepsilon^i \wedge \nabla^\eta_{\kappa(e_i,e_j)} s \;= -\sum_i \langle \zeta^i, \kappa\rangle \wedge \nabla^\eta_{\chi_i} s.$$

□

3. BGG posloupnost a cup součin

Definice 20. $\mathfrak{p}$-ekvivariantním laplaciánem (operátorem *quabla*) nazveme operátor $\Box_\eta : \Lambda^k T^*M \otimes W \to \Lambda^k T^*M \otimes W$, $\Box_\eta = d^\eta \delta_{T^*M} + \delta_{T^*M} d^\eta$.

Lemma 18.

1. $\Box_\eta \delta_{T^*M} - \delta_{T^*M}\Box_\eta = 0$
2. $\Box_\eta d^\eta - d^\eta \Box_\eta = \delta_{T^*M} R^\eta - R^\eta \delta_{T^*M}$

Důkaz. Z definice. □

Lemma 19. *Operátor $\Box$ je invertibilní na $\operatorname{Im}\Box$ a $\Box^{-1}$ komutuje s $d_{\mathfrak{m}}$.*

Důkaz. Podle definice $\operatorname{Im}\Box \subset \operatorname{Im} d_{\mathfrak{m}} \oplus \operatorname{Im}\delta_{\mathfrak{m}^*} = (\operatorname{Ker}\Box)^\perp$, tedy $\operatorname{Im}\Box \cap \operatorname{Ker}\Box = 0$. Evidentně $d_{\mathfrak{m}}\Box = \Box d_{\mathfrak{m}}$, a jelikož $\operatorname{Im} d_{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{Im}\Box$, lze zapůsobit na tuto rovnici zleva $\Box^{-1}$ a dalším zapůsobením zprava získáváme požadované tvrzení. □

Označme $Z_k(W) = \operatorname{Ker}\delta_{\mathfrak{m}^*}$, $B_k(W) = \operatorname{Im}\delta_{\mathfrak{m}^*}$, $H_k(W) = H_k(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$.

Věta 3.1. *Operátor $\Box_\eta : C^\infty(B_k(W)) \to C^\infty(B_k(W))$ je invertibilní.*

Důkaz. Grupu P je možno psát jako $G_0.\exp\mathfrak{m}^*$, přičemž $\exp\mathfrak{m}^*$ je normální podgrupa, a faktorizací získat hlavní fíbrovaný prostor $\mathcal{G}_0$ s grupou G_0. Ten je zároveň bází fíbrovaného prostoru $\mathcal{G} \to \mathcal{G}_0$ s grupou $\exp\mathfrak{m}^*$ a jeho řez σ se nazývá *Weylova konexe.* Ta umožňuje všechny ke $\mathcal{G}$ asociované fíbrované prostory považovat za asociované ke $\mathcal{G}_0$ a tudíž na nich mít gradaci vůči centru G_0, jinými slovy rozklad na Whitneyho sumu fíbrovaných prostorů s různými geometrickými vahami. Na základě tohoto přiřazení geometrických vah můžeme dokázat následující lemma, které samo už ovšem na volbě Weylovy konexe nezávisí.

LEMMA 20. $\square^{-1}(\square_\eta - \square) : C^\infty(B_k(W)) \to C^\infty(B_k(W))$ *je nilpotentní.*

DŮKAZ. Konečně dimenzionální $\mathfrak{g}$-modul $\mathbb{W}$ se rozloží působením gradovacího elementu $E \in \mathfrak{g}_0$ na konečně mnoho ireducibilních částí. E má záporné vlastní hodnoty na $\mathfrak{m}^*$, takže akce $\mathfrak{m}^*$ snižuje geometrickou váhu. Víme, že $\square^{-1}$ je $\mathfrak{g}_0$-ekvivariantní, takže zachová geometrickou váhu. Nechť $s : M \to B_k(W)$ nabývá hodnot v nějaké ireducibilní komponentě $\mathbb{W}$. Výraz

$$\begin{aligned}(\square_\eta - \square)s &= (\delta_{T^*M}(d^\eta - d_\mathfrak{m}) + (d^\eta - d_\mathfrak{m})\delta_{T^*M})s \\ &= \sum_i (\delta_{T^*M}(\varepsilon^i \wedge \nabla^\eta_{e_i} s) + \varepsilon^i \wedge \delta_{T^*M}\nabla^\eta_{e_i} s) \\ &= \sum_i \varepsilon^i \cdot \nabla^\eta_{e_i} s\end{aligned}$$

má nižší geometrickou váhu než s, protože invariantní derivace je speciálně $\mathfrak{g}_0$-ekvivariantní a zachovává geometrickou váhu a $\varepsilon^i \in \mathfrak{m}^*$ ji snižuje. Při odvození jsme prokomutovali algebraický diferenciál s derivací stejně jako v důkazu věty 2.1 a použili lemmatu 5. $\square$

Označme $\mathcal{N} = -\square^{-1}(\square_\eta - \square)$, potom $\square_\eta = \square(\mathrm{Id} - \mathcal{N})$ a díky nilpotenci $\mathcal{N}$

$$\square_\eta^{-1} = (\mathrm{Id} - \mathcal{N})^{-1}\square^{-1} = \left(\sum_{k\geq 0} \mathcal{N}^k\right)\square^{-1}$$

Tedy operátor $\square_\eta^{-1}$ je inverzí k $\square_\eta$ a navíc je konečného řádu. $\square$

DEFINICE 21. Definujme operátory $Q_\eta : C^\infty(\Lambda^k T^*M \otimes W) \to C^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M \otimes W)$ a $\Pi^\eta_k : C^\infty(\Lambda^k T^*M \otimes W) \to C^\infty(\Lambda^k T^*M \otimes W)$ vztahy

$$Q_\eta = \square_\eta^{-1}\delta_{T^*M}, \qquad \Pi^\eta = \mathrm{Id} - d^\eta Q_\eta - Q_\eta d^\eta$$

TVRZENÍ 8.

1. $\Pi^\eta_k \delta_{T^*M} = 0$
2. $\delta_{T^*M}\Pi^\eta_k = 0$
3. *Pro* $s \in \operatorname{Ker}\delta_{T^*M}$ *je* $\Pi^\eta_k s - s \in \operatorname{Im}\delta_{T^*M}$.
4. $(\Pi^\eta_k)^2 = \Pi^\eta_k + Q_\eta R^\eta Q_\eta$
5. $\Pi^\eta \square_\eta = -Q_\eta R^\eta \delta_{T^*M}$

6. $\Box_\eta \Pi^\eta = -\delta_{T^*M} R^\eta Q_\eta$
7. $d^\eta \Pi^\eta_k - \Pi^\eta_{k+1} d^\eta = Q_\eta R^\eta - R^\eta Q_\eta$

DůKAZ. Pišme v tomto důkazu všechny symboly bez indexů, výrazy se zpřehlední a k omylu dojít nemůže.

1. $\Pi\delta = \delta - d\Box^{-1}\delta^2 - \Box^{-1}\delta d\delta = \delta - \Box^{-1}\delta\Box = \delta - \Box^{-1}\Box\delta = 0$
2. $\delta\Pi = \delta - \delta d\Box^{-1}\delta - \delta\Box^{-1}\delta d = d\delta\Box^{-1}\delta - \delta\Box^{-1}\delta d = 0 + 0$, protože $\Box_\eta^{-1}$ a δ_{T^*M} komutují.
3. Pokud $\delta_{T^*M} s = 0$, pak $(\mathrm{Id} - d\Box^{-1}\delta - \Box^{-1}\delta d)s - s = -\Box^{-1}\delta ds = \delta(-\Box^{-1} ds)$.
4. $\Pi^2 = (\mathrm{Id} - dQ - Qd)^2 = \Pi - dQ + dQdQ + QddQ - Qd + dQQd + QdQd$. Platí $dQdQ = d\Box^{-1}\delta d\Box^{-1}\delta = d\Box^{-1}\Box\Box^{-1}\delta - d\Box^{-1}d\delta\Box^{-1}\delta = dQ$, kde jsme opět využili komutaci $\Box_\eta^{-1}$ a δ_{T^*M}. Druhý a třetí člen se tedy pokrátí a obdobně pátý a sedmý. Šestý je nulový a první se čtvrtým tvoří dohromady pravou stranu dokazovaného tvrzení.
5. Platí $\Pi(d\delta + \delta d) = \Pi d\delta = d\delta - dQd\delta - Qdd\delta = -QR\delta$. V prvním kroku jsme využili bodu 1, v druhém definice $\Box_\eta$, jejímž vložením plyne $d\Box^{-1}\delta d\delta = d\delta$.
6. Provede se obdobně jako předchozí bod.
7. Z definice.

$\square$

DEFINICE 22. Paralelní řezy s hodnotami ve $\mathbb{W}$, tedy prvky $s \in C^\infty(M, W)$, pro něž $\nabla^{\mathfrak{g}}_\xi s = 0$ pro všechna $\xi \in TM$, nazýváme parabolickými twistory a odpovídající projekce na prostor koinvariantů $\mathbb{W}/(\mathfrak{m}^*\mathbb{W}) \equiv \mathbb{W}_{\mathfrak{m}^*} \equiv H_0(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$ parabolickými twistorovými poli.

VĚTA 3.2 (Calderbank, Diemer). *Buď $(\mathcal{G}, \eta)$ parabolická geometrie typu $(\mathfrak{g}, P)$, $\mathbb{W}$ je G-modul. Pak existuje posloupnost přirozených diferenciálních operátorů*

$$C^\infty(H_0(W)) \xrightarrow{\mathcal{D}_0^\eta} C^\infty(H_1(W)) \xrightarrow{\mathcal{D}_1^\eta} \dots,$$

taková, že jádrem prvního operátoru je prostor parabolických twistorových polí. Symboly $\mathcal{D}_i^\eta$ závisí pouze na $(\mathfrak{g}, P)$ a na $\mathbb{W}$. Je-li M plochá, je posloupnost lokálně exaktní (tj. exaktní na topologicky triviálních otevřených podmnožinách) a počítá kohomologii M s koeficienty ve $\mathbb{W}$.

Předpokládejme dále, že existují tři G-moduly $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ a $\mathbb{W}_3$ a G-invariantní zobrazení $\varphi : \mathbb{W}_1 \times \mathbb{W}_2 \to \mathbb{W}_3$. Pak existují bilineární diferenciální párování

$C^\infty(H_k(W_1)) \otimes C^\infty(H_l(W_2)) \to C^\infty(H_{k+l}(W_3))$ přiřazující dvojici (α,β) prvek označený $\alpha \sqcup_\eta \beta$, jejichž symboly závisí pouze na $\mathfrak{g}, P$ a zúčastněných modulech $\mathbb{W}_i$. V plochém případě je pro $k = l = 0$ párování rozšířením φ a platí též Leibnizovo pravidlo

$$\mathcal{D}^\eta_{k+l}(\alpha \sqcup_\eta \beta) = \mathcal{D}^\eta_k \alpha \sqcup_\eta \beta + (-)^k \alpha \sqcup_\eta \mathcal{D}^\eta_l \beta. \tag{11}$$

Klíčovým prostředkem pro správnou definici operátorů $\mathcal{D}^\eta$ a $\sqcup_\eta$ jsou operátory Π^η, které spolu s projekcí *proj* a výběrem reprezentanta homologické třídy *repr* umožňují definovat kanonickou projekci $proj \circ \Pi^\eta$ a kanonického reprezentanta $\Pi^\eta \circ repr$. Operátory $\mathcal{D}^\eta$ a $\sqcup_\eta$ pak dostaneme obložením operátorů d^η a $\wedge$ z twistovaného deRhamova komplexu kanonickou projekcí a kanonickým výběrem reprezentanta:

$$\mathcal{D}^\eta_k \alpha = proj \circ \Pi^\eta_{k+1} \circ d^\eta \circ \Pi^\eta_k \circ repr \alpha \tag{12}$$

$$\alpha \sqcup_\eta \beta = proj \circ \Pi^\eta_{k+l}[\Pi^\eta_k \circ repr \alpha \wedge_\varphi \Pi^\eta_l \circ repr \beta], \tag{13}$$

kde $\wedge_\varphi$ znamená vnější součin na formové části a zobrazení φ na modulové části. Z této definice je zřejmé, že symboly operátorů jsou závislé pouze na $\mathfrak{g}, P$ a $\mathbb{W}$, neboť byly zkonstruovány pouze prostředky Lie-algebraické homologie a kohomologie na základě znalosti α a $\nabla^\eta \alpha$. Parabolická twistorová pole jsou jistě v jádru prvního zobrazení, neboť se jedná pouze o faktorizaci parabolických twistorů, jinými slovy d^η-paralelních řezů. Nic jiného se ale už do jádra nedostane, neboť neexistují netriviální prvky v $\operatorname{Im} \delta_{T^*M}$, které by současně byly v $\operatorname{Im} \Pi^\eta_1$.

Exaktnost a Leibnizovo pravidlo v plochém případě poplyne jako speciální případ z následujících dvou lemmat:

LEMMA 21. $\mathcal{D}^\eta_{k+1} \mathcal{D}^\eta_k = proj \circ \Pi^\eta_{k+2} \circ R^\eta \circ \Pi^\eta_k \circ repr$

DůKAZ. Nejprve je užitečné si uvědomit, že Π^η_{k+1} v definici $\mathcal{D}^\eta_k$ je možno vynechat. Pomocí posledního bodu tvrzení 8 lze snadno ukázat, že $d^\eta \circ \Pi^\eta_k$ zobrazují $\operatorname{Ker} \delta_{T^*M}$ do $\operatorname{Ker} \delta_{T^*M}$ a z třetího bodu téhož tvrzení vidíme, že Π^η_{k+1} nemění homologickou třídu.

Podle posledního bodu tvrzení 8 (používáme zkrácenou notaci a vynecháváme *proj* a *repr*) $d\Pi d\Pi = \Pi R \Pi + (QR - RQ) d\Pi$. První člen je přesně to, co hledáme, je tedy nutné ukázat nulovost druhého. Ten je roven

$$\begin{aligned}&\Box^{-1}\delta d^3\Pi - d^2\Box^{-1}\delta d\Pi = \Box^{-1}(\Box - d\delta)d^2\Pi - d^2\Box^{-1}\Box\Pi\\&= R\Pi - \Box^{-1}d\delta R\Pi - R\Pi = -\Box^{-1}d(\Box\delta - \delta\Box + R\delta)\Pi = \Box^{-1}d\delta(d\delta + \delta d)\Pi = 0,\end{aligned}$$

přičemž jsme využívali tvrzení 8, zejména $\delta\Pi = 0$. $\square$

LEMMA 22.

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}^\eta_{k+l}(\alpha \sqcup_\eta \beta) = \mathcal{D}^\eta_k\alpha \sqcup_\eta \beta + (-)^k\alpha \sqcup_\eta \mathcal{D}^\eta_l\beta\\&+\left[\Pi^\eta_{k+l+1}\left((Q_\eta R^\eta \Pi^\eta_k\alpha) \wedge_\varphi \Pi^\eta_l\beta + (-)^k\Pi^\eta_k\alpha \wedge_\varphi (Q_\eta R^\eta \Pi^\eta_l\beta) - R^\eta Q_\eta(\Pi^\eta_k\alpha \wedge_\varphi \Pi^\eta_l\beta)\right)\right]\end{aligned}$$

(Vynecháváme repr a proj nahrazujeme v obstrukčním členu hranatou závorkou. Dále též budeme psát pouze $\wedge$ bez indexu.)

DŮKAZ. Uvědomme si, že díky komutaci δ_{T^*M} s $\Box_\eta$ i s $\Box$ komutuje δ_{T^*M} i s $\Box_\eta^{-1}$ a Q_η lze psát též jako $\delta_{T^*M}\Box_\eta^{-1}$. Dál pak můžeme používat opět kompaktní notaci:

$$\begin{aligned}d\Pi\Pi(\Pi\alpha \wedge \Pi\beta) &= \Pi d\Pi(\Pi\alpha \wedge \Pi\beta) + (QR - RQ)\Pi(\Pi\alpha \wedge \Pi\beta)\\&= \Pi^2 d(\Pi\alpha \wedge \Pi\beta) + \Pi(QR - RQ)(\Pi\alpha \wedge \Pi\beta) + 0\\&= (\Pi + QRQ)(d\Pi\alpha \wedge \Pi\beta + (-)^k\Pi\alpha \wedge d\Pi\beta) - \Pi RQ(\Pi\alpha \wedge \Pi\beta)\end{aligned}$$

Použili jsme nejprve posledního bodu tvrzení 8, členy s RQ a QR jsou nulové díky $\delta\Pi = 0$ nebo jsou v obraze δ, stejný argument přispěje k vymizení QR členu při druhé komutaci d a Π a můžeme díky němu ignorovat i QRQ v posledním vyjádření. Do prvních dvou členů můžeme vložit projekce pomocí vztahu $\mathrm{Id} = \Pi + dQ + Qd$, přičemž členy s Π pak dávají vzniknout Leibnizovským členům, členy s dQ vymizí, neboť $d\Pi\alpha$ je v $\operatorname{Ker}\delta$ a členy s Qd přejdou v první dva křivostní členy v tvrzení lemmatu. $\square$

KAPITOLA 5

Notace abstraktních indexů

1. Pojem abstraktního indexu, základní operace

Abstraktní indexy byly zavedeny Penrosem jako prostředek zápisu formulí obsahujících spinorové veličiny v Minkowského 4-rozměrném prostoročase. Detailní výklad lze nalézt v prvním díle podrobné monografie [**PR84**] nebo ve svižnější knize [**WW90**]. Základním kamenem je generický modul $\mathfrak{S}^\alpha$, kterému přiřazujeme nekonečné množství kopií $\mathfrak{S}^\beta, \mathfrak{S}^\gamma, \dots$ rozlišených různými abstraktními indexy z nekonečné indexové množiny $\mathcal{L} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$. Prvek určité kopie $\varphi^\alpha \in \mathfrak{S}^\alpha$ opatřujeme indexem, který zde ale nerozlišuje jednotlivé komponenty vůči nějaké bázi, pouze označuje, že φ^α je prvkem právě této kopie generického modulu.

Modul $\mathfrak{S}^\alpha$ generuje tenzorovou algebru $T(\mathfrak{S}^\alpha)$, jejíž jednotlivé homogenní části mají indexované kopie $\mathfrak{S}^{\alpha\beta\gamma} \equiv \mathfrak{S}^\alpha \otimes \mathfrak{S}^\beta \otimes \mathfrak{S}^\gamma$ a podobně a indexy u veličin $\varphi^{\alpha\beta\gamma}$ vyjadřují její typ - tenzorovou homogenitu plus konkrétní zařazení do určité kopie. Rovnost dvou veličin je definována pouze v případě, že mají obě stejnou množinu indexů, přičemž na obou stranách rovnosti předpokládáme stejné, obvykle abecední seřazení indexů. Proto nelze psát $\varphi^\alpha = \varphi^\beta$, ale na druhou stranu je zápis komutativní, $\varphi^\alpha\psi^\beta = \psi^\beta\varphi^\alpha \in \mathfrak{S}^{\alpha\beta}$. To samozřejmě nemění nic na faktu, že φ^α a φ^β jsou kanonicky izomorfní.

Označme prostor skalárů $\mathfrak{S}$ (množina reálných nebo komplexních čísel, funkcí, nebo řezů fíbrovaného prostoru), prostor zobrazení $\mathfrak{S}^\alpha \to \mathfrak{S}$ je duálním prostorem k $\mathfrak{S}^\alpha$ a značíme jej $\mathfrak{S}_\alpha$. Výrazy tvaru $\varphi_\alpha\psi^\alpha$ pokládáme za aplikaci lineární formy φ_α na vektor ψ^α a považujeme je za prvky $\mathfrak{S}$. Naproti tomu výraz $\varphi_\alpha\psi^\beta\kappa^\gamma$ je smíšeným 2-kovariantním 1-kontravariantním tenzorem z modulu $\mathfrak{S}_\alpha^{\beta\gamma} = \mathfrak{S}_\alpha \otimes \mathfrak{S}^\beta \otimes \mathfrak{S}^\gamma$, neboli tenzorem valence $\left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$. Obecný tenzor valence $\left[\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right]$ je součtem členů tvaru $\underbrace{P^\alpha Q^\beta \dots}_{p}\underbrace{X_\eta Y_\theta \dots}_{q}$, což znamená, že dvojice stejných indexů je automaticky kontrahovaná, podobně jako u klasických numerických indexů.

Na tenzorech vyšších valencí definujeme symetrizační operace

$$\kappa_{(\alpha\beta)\gamma} = \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\beta\gamma} + \kappa_{\beta\alpha\gamma})$$
$$\kappa_{[\alpha\beta]\gamma} = \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\beta\gamma} - \kappa_{\beta\alpha\gamma})$$

a podobně i (anti)symetrizace přes vyšší počet indexů. Symetrizační operace se provádějí nezávisle na horních a dolních indexech a pokud chceme některé skupiny indexů ze symetrizace vyjmout, uzavřeme je mezi svisličky $||$, např.

$$\chi^{(\alpha}{}_{[\eta}{}^{|\beta|\gamma)}{}_{\theta]} = \frac{1}{4}(\chi^{\alpha}{}_{\eta}{}^{\beta\gamma}{}_{\theta} - \chi^{\alpha}{}_{\theta}{}^{\beta\gamma}{}_{\eta} + \chi^{\gamma}{}_{\eta}{}^{\beta\alpha}{}_{\theta} - \chi^{\gamma}{}_{\theta}{}^{\beta\alpha}{}_{\eta})$$

Tenzor je (anti)symetrický ve skupině indexů, pokud se rovná své (anti)symetrizaci přes tuto skupinu. Pokud provedeme u tenzoru (anti)symetrického v množině indexů L (anti)symetrizaci přes množinu indexů J, $J \subset L$, tenzor se nezmění. Provedeme-li na symetrickém tenzoru antisymetrizaci nebo naopak, dostaneme nulový tenzor. Tenzor (anti)symetrický ve dvou překrývajících se skupinách indexů je (anti)symetrický i v jejich sjednocení. Tenzor, který je symetrický v nějaké množině indexů a antisymetrický v množině, která ji překrývá, musí být nulový. Stejně tak je nulový i tenzor typu $\chi^{[\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu]}{}_{(\mu\nu)}$, kde jsou kontrahované indexy symetrizovány i antisymetrizovány.

Typ písma použitý pro abstraktní index se používá jako rozlišovací znak generického modulu. Malá písmena antikvy $a, b, c, \ldots$ označují, že prvek náleží tenzorové algebře nad vektorovou reprezentací, například v^a. Velká písmena antikvy $A, B, C, \ldots$ jsou symbolem pro spinorovou reprezentaci S^- a velká antikva s čárkou $A', B', C', \ldots$ pro reprezentaci S^+. Vzájemné pořadí indexů různých typů není důležité, v rámci jednotlivých typů však na pořadí záleží, i na pořadí horních a dolních indexů:

$$\varphi^{A}{}_{BA'} \equiv \varphi^{A}{}_{A'B} \equiv \varphi_{A'}{}^{A}{}_{B} \not\equiv \varphi_{A'B}{}^{A}$$

Veličiny s horními a dolními čárkovanými i nečárkovanými indexy nazýváme podle [**PR84**] souhrnně *spinory*, prvky $\mathfrak{S}^A$, $\mathfrak{S}^{A'}$ a jejich duály *spinvektory*.

2. Spinory v dimenzi 4

V dimenzi 4 nastává speciální případ, kdy $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ a vektorová reprezentace není fundamentální reprezentací, ale je tenzorovým součinem $S^+ \otimes S^-$. Spinorové reprezentace jsou obě dvojrozměrné a v tedy jednorozměrných prostorech $\Lambda^2 S_-$, $\Lambda^2 S_+$ lze za určitých normalizačních podmínek vybrat (kovariantně konstantní) formy ε_{AB}, $\varepsilon_{A'B'}$, zprostředkovávající dualitu mezi $\mathfrak{S}^A$ a $\mathfrak{S}_B$. Protože jsou antisymetrické, je třeba stanovit, jak je přesně tato dualita definovaná:

$$\varepsilon^{AB}\psi_B = \psi^A$$

$$\psi^B \varepsilon_{BA} = \psi_A$$

Platí často používaná identita

$$\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} + \varepsilon_{BC}\varepsilon_{AD} + \varepsilon_{CA}\varepsilon_{BD} = 0, \tag{14}$$

kterou získáme tak, že přepíšeme ε_{AB} na $\frac{1}{2}(\varepsilon_{AB} - \varepsilon_{BA})$, stejně tak i ε_{BC} a ε_{CA} a vzniklý součet není nic jiného než $3\varepsilon_{[AB}\varepsilon_{C]D}$. Z dvourozměrnosti S^+ a S^- ale plyne, že spinory antisymetrické přes tři a více indexů jsou nulové. Antisymetrický bispinor ξ_{AB} musí být násobkem ε_{AB} a mírná úprava identity (14)

$$\varepsilon_A{}^C \varepsilon_B{}^D - \varepsilon_B{}^C \varepsilon_A{}^D = \varepsilon_{AB}\varepsilon^{CD} \tag{15}$$

určí jakým násobkem:

$$\xi_{AB} = \xi_{(AB)} + \xi_{[AB]} = \xi_{(AB)} + \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\xi_C{}^C,$$

kde $\xi_C{}^C = \varepsilon_{XY}\xi^{XY}$. Postupně lze každý spinor vyjádřit jako součet součinů totálně symetrických spinorů a faktorů ε_{AB}.

Izomorfizmus vektorové reprezentace a $S^+ \otimes S^-$ je v abstraktních indexech zohledněn tím, že smíšený bispinor $v^{AA'}$ považujeme za izomorfní vektoru v^a, pokud všechna tři písmena jsou stejná. V tomto izomorfizmu si odpovídá spinorové a vektorové zvedání a spouštění indexů:

$$g_{ab}v^b = \varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}v^{BB'},$$

kde g_{ab} je Minkowského metrika. Kovariantní derivaci jakožto operátor na vektorech a formách značíme ∇_a a její rozšíření na spinory $\nabla_{AA'}$.

3. Maxwellovy rovnice a rovnice pro nehmotné pole

Ilustrujme nyní vhodnost notace abstraktních indexů na příkladu Maxwellových rovnic ve vakuu. Elektromagnetické pole je zadáno 2-formou F_{ab} a tu lze rozložit na selfduální a antiselfduální část

$$F = F^+ + F^- = \frac{1}{2}(F - i * F) + \frac{1}{2}(F + i * F),$$

kde $(*F)_{ab} = \frac{1}{2}e_{abcd}F^{cd}$. e_{abcd} je objemová 4-forma. Maxwellovy rovnice ve vakuu je možné zapsat jako $dF = d * F = 0$, což je ekvivalentní $*d * F^+ = 0$ nebo též $*d * F^- = 0$. Tyto rovnice lze v abstraktních indexech vyjádřit

$$\begin{aligned} 0 = *d * F^{\pm} &= \frac{1}{12}e_{abcd}\nabla^b\varepsilon^{cdef}F^{\pm}_{ef} \\ &= -\frac{1}{6}(\delta^e_a\delta^f_b - \delta^f_a\delta^e_b)\nabla^b F^{\pm}_{ef} \\ &= \nabla^b F^{\pm}_{ab} \end{aligned}$$

Nahraďme vektorové indexy spinorovými:

$$\begin{aligned} F_{ab} \equiv F_{AA'BB'} &= \frac{1}{2}(F_{AA'BB'} - F_{BB'AA'}) \\ &= \frac{1}{2}(F_{AA'BB'} - F_{AB'BA'} + F_{AB'BA'} - F_{BB'AA'}) \\ &= \frac{1}{2}F_{AC'B}{}^{C'}\varepsilon_{A'B'} + \frac{1}{2}F_{CB'}{}^{C}{}_{A'}\varepsilon_{AB} \\ &= \varphi_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \varphi_{A'B'}\varepsilon_{AB}, \end{aligned}$$

kde jsme nejprve využili antisymetrie F_{ab} a poslední úpravou jen pohodlněji označili. Obě $\varphi_{AB}, \varphi_{A'B'}$ jsou symetrická, protože

$$\varphi_{[AB]} = \frac{1}{4}\varepsilon_{AB}F_{CC'}{}^{CC'} = \frac{1}{4}\varepsilon_{AB}F_c{}^c = 0,$$

jelikož stopa antisymetrického tenzoru je nulová. 4-forma objemu e_{abcd} má spinorové vyjádření

$$e_{abcd} = i\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{A'D'}\varepsilon_{B'C'} - i\varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC}\varepsilon_{A'C'}\varepsilon_{B'D'}$$

Pomocí identity (14) se ověří antisymetrie pravé strany ve dvojicích indexů ab, bc a cd, což zajišťuje rovnost až na násobek. Faktor i je pak důsledkem konvenční konstrukce báze Minkowského prostoru ze spinorové báze. Tedy

$$\begin{aligned} (*F)_{ab} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}{}^{cd}F_{cd} \\ &= \frac{i}{2}(\varepsilon_A{}^C\varepsilon_B{}^D\varepsilon_{A'}{}^{D'}\varepsilon_{B'}{}^{C'} - \varepsilon_A{}^D\varepsilon_B{}^C\varepsilon_{A'}{}^{C'}\varepsilon_{B'}{}^{D'})(\varphi_{CD}\varepsilon_{C'D'} + \varphi_{C'D'}\varepsilon_{CD}) \\ &= -i(\varphi_{AB}\varepsilon_{A'B'} - \varphi_{A'B'}\varepsilon_{AB}) \end{aligned}$$

a tudíž selfduální část elektromagnetického pole je rovna $\varphi_{A'B'}\varepsilon_{AB}$. Maxwellovy rovnice ve vakuu se pak v abstraktních indexech redukují na jednoduchý tvar

$$\nabla^{AA'}\varphi_{A'B'} = 0.$$

V analogii s touto rovnicí nazýváme rovnici

$$\nabla^{AA'}\varphi_{A'B'\dots K'},$$

kde $\varphi_{A'B'\dots K'}$ je totálně symetrický spinor s n čárkovanými indexy, rovnicí pro nehmotné pole o helicitě $\frac{1}{2}n$. Podobně rovnici

$$\nabla^{AA'}\varphi_{AB\dots K},$$

kde $\varphi_{AB\dots K}$ je totálně symetrický spinor s n nečárkovanými indexy, nazýváme rovnicí pro nehmotné pole o helicitě $-\frac{1}{2}n$. Při diskuzi o zvyšování a snižování helicity ovšem budeme znaménko ignorovat a mluvit např. o zvyšování helicity, pokud se zvýší její absolutní hodnota.

4. Cliffordovské násobení a Lie-algebraická (ko)homologie

Prvky Cliffordovy algebry je možné chápat jako endomorfizmy spinorové reprezentace $S = S^+ \oplus S^-$, srv. lemma 3. Přitom endomorfizmy odpovídající vektorové části Cliffordovy algebry zobrazují S^+ do S^- a naopak. V abstraktních indexech píšeme tato zobrazení

$$\begin{aligned} c(v)\psi_A &= \sqrt{2}v^A{}_{A'}\psi_A \\ c(v)\psi_{A'} &= -\sqrt{2}v_A{}^{A'}\psi_{A'} \end{aligned}$$

a snadno ověříme, že skutečně splňují definiční relaci Cliffordovy algebry:

$$\begin{aligned} (c(v)c(w) + c(w)c(v))\psi_B &= -2(v_A{}^{A'}w^B{}_{A'} + w_A{}^{A'}v^B{}_{A'})\psi_B \\ &= -2(\varepsilon_A{}^C\varepsilon^{A'C'}\varepsilon^{BD}\varepsilon_{A'}{}^{D'} + \varepsilon_A{}^D\varepsilon^{A'D'}\varepsilon^{BC}\varepsilon_{A'}{}^{C'})v_{CC'}w_{DD'}\psi_B \\ &= 2(\varepsilon_A{}^C\varepsilon^{C'D'}\varepsilon^{BD} - \varepsilon_A{}^D\varepsilon^{C'D'}\varepsilon^{BC})v_{CC'}w_{DD'}\psi_B \\ &= 2\varepsilon_A{}^B\varepsilon^{CD}\varepsilon^{C'D'}v_{CC'}w_{DD'}\psi_B \\ &= 2(g_{cd}v^c w^d)\psi_A \end{aligned}$$

Podobně pro $\psi_{A'}$.

Nyní obraťme pozornost k operátorům Lie-algebraické homologie a kohomologie, pokud je modul $\mathbb{W}$ tenzorovou mocninou spinorových reprezentací. Operátor $d_{\mathfrak{m}}$ na formách nultého stupně je definován vztahem

$$d_{\mathfrak{m}}(s_j w_j) = s_j \sum \varepsilon_k \otimes e_k \cdot w_j,$$

kde w_j jsou prvky báze $\mathbb{W}$, s_j reálné nebo komplexní koeficienty a ε_k,e_k duální báze $\mathfrak{m}^*$,$\mathfrak{m}$. Oproti definici 11 chybí první člen, jenž v sobě obsahuje komutátory prvků báze $\mathfrak{m}$, které jsou pro abelovské $\mathfrak{m}$ konformní geometrie samozřejmě nulové. V abstraktních indexech a na $\psi_{B'}$ to odpovídá

$$d_{\mathfrak{m}}\psi_{B'} = c(\cdot)\psi_{B'} = -\sqrt{2}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'}{}^{B'}\psi_{B'},$$

přičemž tečka v $c(\cdot)$ symbolizuje, že se jedná o 1-formu – tedy že je pravá strana spinvektorem po kontrakci s nějakým vektorem $X^{AA'}$.

Podobně

$$\delta_{\mathfrak{m}^*}(a_{ij}\varepsilon_i \otimes w_j) = a_{ij}\varepsilon_i . w_j$$

je nenulové pouze na $\omega_{AA'B}$ a rovná se

$$\delta_{\mathfrak{m}^*}(\omega_{AA'B}) = \sqrt{2}\varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'}{}_{B'}\omega_{AA'B}$$

Odmocniny ze dvou zajišťují splnění cliffordovské podmínky a následkem toho i správnou normalizaci $d_{\mathfrak{m}}$, $\delta_{\mathfrak{m}^*}$ a $\Box$:

$$\begin{aligned}\Box\psi_{B'} = \delta_{\mathfrak{m}^*}(-\sqrt{2}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'}{}^{B'}\psi_{B'}) = \\ = \sqrt{2}\varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'}{}_{C'}(-\sqrt{2})\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'}{}^{B'}\psi_{B'} = -2.2\varepsilon^{A'}{}_{C'}\psi_{A'} = 4\psi_{C'}.\end{aligned}$$

Na bázových elementech $\Lambda^k\mathfrak{m}^* \otimes S$ jsou $d_{\mathfrak{m}}$ a δ zadány (v dimenzi 4)

$$\begin{aligned}d_{\mathfrak{m}}s_j &= \varepsilon^k \otimes e_k \cdot s_j \\ d_{\mathfrak{m}}(\varepsilon^i \otimes s_j) &= \varepsilon^{ki} \otimes e_k \cdot s_j \\ d_{\mathfrak{m}}(\varepsilon^{li} \otimes s_j) &= \varepsilon^{kli} \otimes e_k \cdot s_j \\ d_{\mathfrak{m}}(\varepsilon^{oli} \otimes s_j) &= \varepsilon^{koli} \otimes e_k \cdot s_j \\ d_{\mathfrak{m}}(\varepsilon^{poli} \otimes s_j) &= 0\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathfrak{m}^*} s_j &= 0 \\
\delta_{\mathfrak{m}^*}(\varepsilon^i \otimes s_j) &= \varepsilon_i \cdot s_j \\
\delta_{\mathfrak{m}^*}(\varepsilon^{li} \otimes s_j) &= \varepsilon^i \otimes \varepsilon^l \cdot s_j - \varepsilon^l \otimes \varepsilon^i \cdot s_j \\
\delta_{\mathfrak{m}^*}(\varepsilon^{oli} \otimes s_j) &= \varepsilon^{li} \otimes \varepsilon^o \cdot s_j - \varepsilon^{oi} \otimes \varepsilon_l \cdot s_j + \varepsilon^{ol} \otimes \varepsilon^i \cdot s_j \\
\delta_{\mathfrak{m}^*}(\varepsilon^{poli} \otimes s_j) &= \varepsilon^{oli} \otimes \varepsilon^p \cdot s_j - \varepsilon^{pli} \otimes \varepsilon^o \cdot s_j + \varepsilon^{poi} \otimes \varepsilon_l \cdot s_j - \varepsilon^{pol} \otimes \varepsilon^i \cdot s_j.
\end{aligned}$$

V abstraktních indexech to lze přepsat

$$\begin{aligned}
d_{\mathfrak{m}} \psi_{J'} &= -\sqrt{2} \varepsilon_{KJ} \varepsilon_{K'}{}^{J'} \psi_{J'} \\
d_{\mathfrak{m}} \omega_{II'J'} &= -\sqrt{2} \varepsilon_{KJ} \varepsilon_{K'}{}^{J'} \omega_{II'J'} \\
d_{\mathfrak{m}} F_{LL'II'J'} &= -\sqrt{2} \varepsilon_{KJ} \varepsilon_{K'}{}^{J'} F_{LL'II'J'}
\end{aligned}$$

atd, přičemž F automaticky považujeme za antisymetrické vůči současné záměně I za L a I' za L' a stejně mlčky předpokládáme, že výsledný tenzor v $\mathfrak{S}_{KK'LL'IL'J}$ je antisymetrický vůči permutacím I, K, L prováděným současně na čárkovaných i nečárkovaných indexech.[1] Operátor $\delta_{\mathfrak{m}^*}$ má vyjádření

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathfrak{m}^*} \omega_{II'J} &= \sqrt{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon^{I'}{}_{J'} \omega_{II'J} \\
\delta_{\mathfrak{m}^*} F_{LL'II'J} &= \sqrt{2} \varepsilon^{XJ} \varepsilon^{X'}{}_{J'} (F_{XX'II'J} - F_{II'XX'J}) \\
\delta_{\mathfrak{m}^*} G_{OO'LL'II'J} &= \sqrt{2} \varepsilon^{XJ} \varepsilon^{X'}{}_{J'} (G_{XX'LL'II'J} - G_{II'XX'LL'} + G_{LL'II'XX'}).
\end{aligned}$$

[1] Takový typ symetrie se v abstraktních indexech stěží pohodlně zapíše.

KAPITOLA 6

Bilineární párování jako zvyšování helicity

1. Dimenze 4

Naším cílem je vyjádřit v abstraktních indexech vzorec (13) ve speciálním případě cup součinu elementu nulté homologie s elementem druhé homologie:

$$\tilde{F} = proj\Pi_2^\eta(\Pi_0^\eta repr\varphi \wedge \Pi_2^\eta reprF), \tag{16}$$

přičemž F, $\tilde{F}$ a φ jsou homologické třídy pocházející z deRhamových komplexů twistovaných po řadě moduly $\mathbb{W}_2$, $\mathbb{W}_3$ a $\mathbb{W}_1$. Musí mezi nimi existovat $\mathfrak{so}(4,2)$-ekvivariantní zobrazení $f : \mathbb{W}_1 \otimes \mathbb{W}_2 \to \mathbb{W}_3$. Mají-li být ireducibilní, bude f projekce. Nejsnáze zaručí její netrivialitu, pokud budeme požadovat, aby jí byl Cartanův součin neboli projekce na komponentu tenzorového součinu o nejvyšší váze. Jak uvidíme později, nejsnáze interpretovatelná je volba $\varphi \in \ {}_0{}^{1}_{0}$, $F \in \ {}_0{}^{m}_{0}$ a $\tilde{F} \in \ {}_0{}^{m+1}_{0}$.

Prostory řetězců $C_p(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$ jsou $\Lambda^p\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$. Pokud je $\mathbb{W} = \mathbb{C}$, je exaktní posloupnost řetězců

$$0 \xrightarrow{d_\mathfrak{m}} \mathbb{C} \xrightarrow{d_\mathfrak{m}} \mathfrak{m}^* \xrightarrow{d_\mathfrak{m}} \Lambda^2\mathfrak{m}^* \xrightarrow{d_\mathfrak{m}} \Lambda^3\mathfrak{m}^* \xrightarrow{d_\mathfrak{m}} \Lambda^4\mathfrak{m}^* \xrightarrow{d_\mathfrak{m}} 0$$

zároveň posloupností homologií, neboť první člen v definici operátoru $d_\mathfrak{m}$ je nulový díky komutativitě $\mathfrak{m}^*$ a druhý díky trivialitě $\mathbb{W}$. Algebra $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$ je pouze polojednoduchá, je direktním součtem dvou $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Proto každá reprezentace $\mathfrak{co}(3,1)$ bude určena jednak konformní vahou, jednak násobkem fundamentální váhy první $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ a druhé $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Tyto dvě váhy hrají roli vah spinorových reprezentací a obecná reprezentace $\mathfrak{so}(3,1)$ má tedy tvar $S_+^k \otimes S_-^l$, kde S^k je k-tá symetrická tenzorová mocnina. Ve zkratce zapíšeme takovou reprezentaci symbolem $(\gamma)\,|\,{}^{k}_{l}$. Závorka kolem γ znamená, že se jedná o konformní váhu a nikoliv koeficient nad okřížkovaným kořenem. Zavádíme tuto modifikaci zápisu, jelikož při tenzorových součinech se skládá konformní váha činitelů aditivně, kdežto koeficient nad okřížkovaným kořenem komplikovaněji.

Pro rozklad tenzorových součinů reprezentací $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ platí známé pravidlo

$$S^k \otimes S^l = S^{|k-l|} \oplus S^{|k-l|+2} \oplus \ldots \oplus S^{k+l}, \tag{17}$$

a tedy roznásobením $S^k_+ \otimes S^l_- \otimes S^{k'}_+ \otimes S^{l'}_-$ dostáváme

$$(\gamma)|^{k}_{l} \otimes (\gamma')|^{k'}_{l'} = \bigoplus_{\substack{i=|k-k'| \\ i-|k-k'|=2p}}^{k+k'} \bigoplus_{\substack{j=|l-l'| \\ j-|l-l'|=2p}}^{l+l'} (\gamma+\gamma')|^{i}_{j} \tag{18}$$

Vektorová reprezentace $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{m}^* = S_+ \otimes S_- = (-1)|^{1}_{1} = -2|^{1}_{1}$ má váhy $(-1)|^{1}_{1}$, $(-1)|^{-1}_{1}$, $(-1)|^{1}_{-1}$ a $(-1)|^{-1}_{-1}$. Antisymetrické tenzorové mocniny $\Lambda^p\mathfrak{m}^*$ mají váhy dané součty p-prvkových podmnožin množiny vah $\mathfrak{m}^*$, což dává dohromady

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}^* &= (-1)|^{1}_{1} \\
\Lambda^2\mathfrak{m}^* &= (-2)|^{2}_{0} \oplus (-2)|^{0}_{2} \\
\Lambda^3\mathfrak{m}^* &= (-3)|^{1}_{1} \\
\Lambda^4\mathfrak{m}^* &= (-4)|^{0}_{0}
\end{aligned}$$

Vidíme, že v tomto nejjednodušším případě tvar homologií odpovídá tvrzení 6 a provedením afinních Weylových akcí se snadno ověří, že shoda je úplná.

Zvolme nyní za $\mathbb{W}$ ireducibilní $\mathfrak{so}(4,2)$-modul s nejvyšší vahou $\lambda_{\mathbb{W}} = 0\,{}^{m}_{0}$, v souřadnicích $(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}, \frac{m}{2})$. Podle lemmatu 2 má $\mathbb{W}$ jako $\mathfrak{g}_0$-modul rozklad

$$0\,{}^{m}_{0} = \bigoplus_{i=0}^{m} (\tfrac{m}{2}-i)|^{m-i}_{i} \tag{19}$$

Protože $C_0(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) = \mathbb{W}$, je $H_0(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$ ten sčítanec, pro nějž platí, že jeho váha ξ splňuje $|\delta + \lambda_{\mathbb{W}}| = |\delta + \xi|$, což je triviálně splněno pro $\xi = \lambda_{\mathbb{W}}$. Podle tvrzení 6 je to jediné takové ξ.

S ohledem na (13) nás ještě zajímá

$$C_2(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) = \Lambda^2\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W} = \big((-2)|^{2}_{0} \oplus (-2)|^{0}_{2} \big) \otimes \bigoplus_{i=0}^{m} (\tfrac{m}{2}-i)|^{m-i}_{i}, \tag{20}$$

což má podle (18) rozklad

$$\begin{aligned}
&\bigoplus_{i=0}^{m-2} (\tfrac{m}{2}-i-2)|^{m-i-2}_{i} \oplus \bigoplus_{i=0}^{m} (\tfrac{m}{2}-i-2)|^{m-i}_{i} \oplus \bigoplus_{i=0}^{m} (\tfrac{m}{2}-i-2)|^{m-i+2}_{i} \oplus \\
&\qquad \oplus \bigoplus_{i=2}^{m} (\tfrac{m}{2}-i-2)|^{m-i}_{i-2} \oplus \bigoplus_{i=0}^{m} (\tfrac{m}{2}-i-2)|^{m-i}_{i} \oplus \bigoplus_{i=0}^{m} (\tfrac{m}{2}-i-2)|^{m-i}_{i+2}
\end{aligned} \tag{21}$$

Tvrzení 9. $H_2(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W}) = {}_{(\frac{m}{2}-2)|}{}^{m+2}_{0} \oplus {}_{(-\frac{m}{2}-2)|}{}^{0}_{m+2}$

Důkaz. Přepišme pravou stranu do souřadnic:

$$
{}_{(\frac{m}{2}-2)|}{}^{m+2}_{0} \oplus {}_{(-\frac{m}{2}-2)|}{}^{0}_{m+2} = {}_{-3|}{}^{m+2}_{0} \oplus {}_{-m-3|}{}^{0}_{m+2} =
$$
$$
\left(\tfrac{m}{2}-2, \tfrac{m}{2}+1, \tfrac{m}{2}+1\right) \oplus \left(-\tfrac{m}{2}-2, \tfrac{m}{2}+1, -\tfrac{m}{2}-1\right)
$$

Cartanova-Killingova forma je násobkem euklidovské normy vzhledem k bázi $L_i \in \mathfrak{h}^*$, vůči níž to souřadnice jsou.

$$
|\delta+\lambda|^2 - |\delta+\xi|^2 = \begin{cases} |(\frac{m}{2}+2, \frac{m}{2}+1, \frac{m}{2})|^2 - |(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+2, \frac{m}{2}+1)|^2 = 0 \\ |(\frac{m}{2}+2, \frac{m}{2}+1, \frac{m}{2})|^2 - |(-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+2, -\frac{m}{2}-1)|^2 = 0 \end{cases},
$$

tedy podle věty (3.3) ${}_{(\frac{m}{2}-2)|}{}^{m+2}_{0} \oplus {}_{(-\frac{m}{2}-2)|}{}^{0}_{m+2} \subset \operatorname{Ker}\square = H_2(\mathfrak{m}^*, \mathbb{W})$. Vzhledem k obsahu tvrzení (6) musí být inkluze rovností. $\square$

Nechť tedy F a $\tilde{F}$ jsou 2-formy reprezentačního typu ${}_{(\frac{m}{2}-2)|}{}^{m+2}_{0} \oplus {}_{(-\frac{m}{2}-2)|}{}^{0}_{m+2}$ resp. ${}_{(\frac{m}{2}-\frac{3}{2})|}{}^{m+3}_{0} \oplus {}_{(-\frac{m}{2}-\frac{5}{2})|}{}^{0}_{m+3}$. a prvek φ náleží ${}_{(\frac{1}{2})|}{}^{1}_{0}$. Připomeňme definici diferenciální projekce:

$$
\Pi^\eta = \operatorname{Id} - d^\eta Q_\eta - Q_\eta d^\eta, \tag{22}
$$

kde $d^\eta = \nabla + d_{\mathfrak{m}}$ a $Q_\eta = (\sum_{k\geq 0} \mathcal{N}^k)\square^{-1}\delta_{\mathfrak{m}^*}$, přičemž

$$
\mathcal{N} = -\square^{-1}(\square_\eta - \square) = -\square^{-1}(\nabla\delta_{\mathfrak{m}^*} + \delta_{\mathfrak{m}^*}\nabla)
$$

Pod ∇ zde myslíme kovariantní derivaci rozšířenou na tenzory (speciálně tedy na formy), v abstraktních indexech psanou $\nabla_{AA'}$.

Pojďme nyní do vzorce (22) dosadit.

$$
\begin{aligned}
\Pi^\eta = \operatorname{Id} &- (\nabla + d_{\mathfrak{m}})(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-)^k(\square^{-1}(\delta_{\mathfrak{m}^*}\nabla + \nabla\delta_{\mathfrak{m}^*}))^k)\square^{-1}\delta_{\mathfrak{m}^*} - \\
&- (1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-)^k(\square^{-1}(\delta_{\mathfrak{m}^*}\nabla + \nabla\delta_{\mathfrak{m}^*}))^k)\square^{-1}\delta_{\mathfrak{m}^*}(\nabla + d_{\mathfrak{m}})
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
= \operatorname{Id} - (\nabla + d_{\mathfrak{m}})(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-Q\nabla)^k)Q - (1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-Q\nabla)^k)Q(\nabla + d_{\mathfrak{m}}), \tag{24}
$$

kde $Q = \square^{-1}\delta_{\mathfrak{m}^*}$. Využili jsme komutaci $\square^{-1}$ a $\delta_{\mathfrak{m}^*}$ a to, že $\delta_{\mathfrak{m}^*}^2 = 0$. První člen je nula na $\operatorname{Ker}\delta_{\mathfrak{m}^*}$, tedy i na $\operatorname{Ker}\square$, druhý zase nabývá hodnot v $\operatorname{Im}\square^{-1} = \operatorname{Im}\square$, takže jeho projekce na $\operatorname{Ker}\square$ je nulová. $\operatorname{Ker}\square$ je ovšem izomorfní (ko)homologické grupě příslušného řádu, a je to právě tento izomorfizmus, jímž identifikujeme jisté podmoduly s homologiemi, které jsou striktně vzato faktormoduly. Vybíráme-li reprezentanta homologické třídy v (16) v souladu s tímto izomorfizmem, můžeme uvnitř závorky zapomenout na první člen (po Id) v (24) a u Π_2^η vně závorky zase na druhý člen v (24).

Protože i $d_{\mathfrak{m}}$ komutuje s $\Box^{-1}$, zjednodušuje se nakonec Π^η uvnitř závorky na

$$\mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} (-Q\nabla)^i \tag{25}$$

a vně stačí uvažovat

$$\mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} (-\nabla Q)^i \tag{26}$$

To jsou stejné vzorce, jaké obdržel v plochém případě Baston v práci [**Ba91**], viz též [**Se97**]. Zde ovšem odvození nezávisí na tom, zda je prostoročas plochý či nikoliv.

Operátor Q je $\mathfrak{g}_0$-ekvivariantní, nemění tedy reprezentační typ, operátor ∇ ovšem z reprezentačního hlediska působí jako tenzorový součin s $(-1)|^1_1$. Zde se znovu a konkrétně přesvědčujeme, že suma v obou výrazech bude mít pouze konečně mnoho členů, protože i-tý člen snižuje konformní váhu o i a všechny naše moduly jsou konečnědimenzionální, tedy i s dolním omezením na vyskytující se konformní váhy.

Podívejme se nyní na $\Pi_0^\eta repr\varphi$. Reprezentační typ homologie je $(\frac{1}{2})|^1_0$ a ve stejné ireducibilní komponentě volme i $repr\varphi$. Vidíme, že ze sumy $\sum_{i=1}(-Q\nabla)^i$, bude na $repr\varphi$ nenulový nejvýše první člen. $\nabla repr\varphi$ je reprezentačního typu $(-1)|^1_1 \otimes (\frac{1}{2})|^1_0 = (-\frac{1}{2})|^0_1 \oplus (-\frac{1}{2})|^2_1$, ovšem komponenta $(-\frac{1}{2})|^2_1$ je operátorem Q zobrazována na nulu, neboť tato reprezentace se v rozkladu forem nulového stupně nevyskytuje. Můžeme tedy symbolicky psát

$$\Pi_0^\eta repr\varphi = \left[\ (\tfrac{1}{2})|^1_0\ \right]^0 \oplus \left[\ (-\tfrac{1}{2})|^0_1\ \right]^1 \tag{27}$$

kde horním indexem vyznačujeme diferenciální řád, tedy kolika aplikacemi $-Q\nabla$ se dotyčná komponenta dostane.

V případě $\Pi_2^\eta reprF$ náleží $reprF$ do $(\frac{m}{2}-2)|^{m+2}_0 \oplus (-\frac{m}{2}-2)|^0_{m+2}$ Druhý člen má nejmenší možnou konformní váhu v rozkladu $\Lambda^2\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}_2$, proto bude na něm $\Pi_2^\eta = \mathrm{Id}$. První člen má rozdíl horního koeficientu a konformní váhy roven $\frac{m}{2}+4$, což je v rámci rozkladu (21) maximální hodnota, nabývaná pouze sčítanci ve třetí velké direktní sumě. V tenzorovém součinu s $(-1)|^1_1$ se mohou objevit pouze komponenty s konformní vahou nižší o 1 a horním a dolním koeficientem lišícím se o ± 1. Zároveň tyto komponenty musí být v (21), tedy horní koeficient se nesmí zvýšit, jinak by se zvýšil rozdíl mezi ním a konformní vahou na $\frac{m}{2}+6$. Pokud se horní koeficient sníží o 1, rozdíl zůstane $\frac{m}{2}+4$ a vidíme, že při pevně dané konformní váze zbývá jako kandidát na $\operatorname{Im} Q\nabla$ jediná komponenta, a to $(\frac{m}{2}-3)|^{m+1}_{1}$. Podle (18) se $(\frac{m}{2}-3)|^{m+1}_{1}$ skutečně v tenzorovém součinu $(-1)|^{1}_{1} \otimes (\frac{m}{2}-2)|^{m+2}_{0}$ nachází, tedy i v $\operatorname{Im} Q\nabla$. Ze stejných důvodů $\operatorname{Im}(Q\nabla)^i$ musí být $(i+1)$-ní sčítanec ve třetí direktní sumě v (21).

V tenzorovém součinu

$$\left[\, (\tfrac{1}{2})|^{1}_{0} \,\right]^0 \oplus \left[\, (-\tfrac{1}{2})|^{0}_{1} \,\right]^1$$

$$\otimes$$

$$\Big(\left[\, (\tfrac{m}{2}-2)|^{m+2}_{0} \,\right]^0 \oplus \left[\, (\tfrac{m}{2}-3)|^{m+1}_{1} \,\right]^1 \oplus \ldots \oplus \left[\, (-\tfrac{m}{2}-2)|^{2}_{m} \,\right]^m$$
$$\oplus \left[\, (-\tfrac{m}{2}-2)|^{0}_{m+2} \,\right]^0 \Big)$$

nyní tedy musíme nalézt komponenty, které se pomocí (26) zobrazí do $(\frac{m}{2}-\frac{3}{2})|^{m+3}_{0} \oplus (-\frac{m}{2}-\frac{5}{2})|^{0}_{m+3}$.

Komponenta $(\frac{m}{2}-\frac{3}{2})|^{m+3}_{0}$ má vysokou konformní váhu, kterou lze získat pouze součinem komponent

$$\left[\, (\tfrac{1}{2})|^{1}_{0} \,\right]^0 \otimes \left[\, (\tfrac{m}{2}-2)|^{m+2}_{0} \,\right]^0$$

Všechny ostatní kombinace komponent by daly konformní váhu nižší a ta by se dále snižovala působením ∇Q z (26).

Naopak komponenta $\left[\, (-\frac{m}{2}-2)|^{0}_{m+2} \,\right]^0$ v (1) má konformní váhu nízkou a může být zobrazena pouze do $(-\frac{m}{2}-\frac{5}{2})|^{0}_{m+3}$ a pouze dvěma způsoby:

$$\left[\, (-\tfrac{m}{2}-2)|^{0}_{m+2} \,\right]^0 \otimes \left[\, (-\tfrac{1}{2})|^{0}_{1} \,\right]^1$$

a

$$\left[\, (-\tfrac{m}{2}-2)|^{0}_{m+2} \,\right]^0 \otimes \left[\, (\tfrac{1}{2})|^{1}_{0} \,\right]^0 \otimes (-1)|^{1}_{1}$$

Z (18) je vidět, že skutečně oba součiny mají netriviální projekci na $(\frac{m}{2}-\frac{3}{2})|^{m+3}_{0}$.

Zbývá prozkoumat, zda se může suma $\bigoplus_{i=0}^{m} \left[\, (\frac{m}{2}-i-2)|^{m+2-i}_{i} \,\right]^i$ zobrazit do komponenty $(-\frac{m}{2}-\frac{5}{2})|^{0}_{m+3}$. Součet konformní váhy a dolního koeficientu je v sumě roven $\frac{m}{2}-2$ a u $(-\frac{m}{2}-\frac{5}{2})|^{0}_{m+3}$ se rovná $\frac{m}{2}+\frac{1}{2}$. Při tenzorovém součinu s $\left[\, (\frac{1}{2})|^{1}_{0} \,\right]^0$ se zvýší konformní váha o $\frac{1}{2}$ a dolní koeficient se nezmění, zatímco při součinu s $\left[\, (-\frac{1}{2})|^{0}_{1} \,\right]^1$ se konformní váha o $\frac{1}{2}$ sníží, ale existuje komponenta, v níž je dolní koeficient o 1 vyšší. Celkově se horní mez na součet konformní váhy a dolního koeficientu posune na $\frac{m}{2}-\frac{3}{2}$. Aplikace ∇Q, tedy z reprezentačního hlediska tenzorový součin s ${}_{(-1)}|^{1}_{1}$, už tuto hodnotu dále nezvýší. Není tudíž možné, aby se v obrazu některého $(\nabla Q)^i$ vyskytla komponenta ${}_{(\frac{m}{2}-\frac{3}{2})}|^{m+3}_{0}$.

Celkově tedy vidíme, že

$$F \sqcup_\eta \varphi = proj_+(repr_+ F \otimes repr\varphi) + proj_-(repr_- F \otimes (-Q\nabla) repr\varphi) \\ - proj_- \nabla Q (repr_- F \otimes repr\varphi), \tag{28}$$

přičemž indexem $\pm$ vyznačujeme, na kterou část homologie stupně 2 projektujeme; $\operatorname{Im} proj_+ \subset {}_{(\frac{j}{2}-2)}|^{j+2}_{0} \supset \operatorname{Im} repr_+$ pro nějaké j a $\operatorname{Im} proj_- \subset {}_{(-\frac{j}{2}-2)}|^{0}_{j+2} \supset \operatorname{Im} repr_-$. K vyjádření tohoto vzorce v abstraktních indexech ještě musíme vyčíslit $\Box^{-1}$ na ${}_{(-\frac{1}{2})}|^{0}_{1} = (-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ a ${}_{(-\frac{m}{2}-\frac{3}{2})}|^{1}_{m+2} = (-k-\frac{3}{2}|k+\frac{3}{2},-k-\frac{1}{2})$, $k=\frac{m}{2}$. V prvním případě nám dává vzorec (10) $\Box^{-1} = \frac{1}{4}$, ve druhém

$$\begin{aligned}\Box^{-1} &= \left(|(k+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2})+(2,1,0)|^2 - |(-k-\tfrac{3}{2},k+\tfrac{3}{2},-k-\tfrac{1}{2})+(2,1,0)|^2\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{4(k+\frac{1}{2})}\end{aligned}$$

Přiřaďme nyní našim φ a F v souladu s rozkladem v lemmatu 2 abstraktně indexové vyjádření:

$$\begin{gathered}\varphi = \varphi^0_A + \varphi^0_{A'} \\ F = F^0_{AA'BB'(CD\ldots K)} + F^1_{AA'BB'(CD\ldots)K'} + \ldots + F^{k+1}_{AA'BB'(C'D'\ldots K')}\end{gathered}$$

Potom

$$\begin{gathered}repr\varphi = \varphi^0_A \\ repr F = \varepsilon_{A'B'}\psi_{AB\ldots K} + \varepsilon_{AB}\tilde{\psi}_{A'B'\ldots K'},\end{gathered}$$

kde

$$\begin{aligned}\psi_{AB\ldots K} &= \frac{1}{2} F^0_{(A|X'|B}{}^{X'}{}_{CD\ldots K)} \\ \tilde{\psi}_{A'B'\ldots K'} &= \frac{1}{2} F^{k+1}_{(X|A'|}{}^{X}{}_{B'C'D'\ldots K')}.\end{aligned}$$

První člen v (28) je jednoduše juxtapozice doplněná symetrizací $\psi_{(AB\ldots K}\varphi_{L)}\varepsilon_{A'B'}$. Tento člen nás nebude příliš zajímat, neboť operátor $\mathcal{D}^\eta$ v BGG posloupnosti (tak, jak jsme si ji zvolili skrze $\mathbb{W}$) je na $\psi_{(AB\ldots K)}$ druhého řádu a neodpovídá pohybové rovnici pro nehmotné pole. Druhý člen je

$$proj_-(repr_-F \otimes (-Q\nabla) repr\varphi) = -proj_-(\varepsilon_{AB}\tilde{\psi}_{A'B'\ldots K'}\square^{-1}\delta_{\mathfrak{m}^*}\nabla_{XX'}\varphi_L) =$$
$$= proj_-(\varepsilon_{AB}\tilde{\psi}_{A'B'\ldots K'}\square^{-1}\sqrt{2}\nabla_{XL'}\varphi^X) = \varepsilon_{AB}\tilde{\psi}_{(A'B'\ldots K'}\frac{\sqrt{2}}{4}\nabla_{|X|L')}\varphi^X$$

a třetí

$$\begin{aligned}
-proj_-\nabla Q(\tilde{\psi}_{(A'B'\ldots K')}\varepsilon_{AB}\varphi_L) &= -proj_-\nabla\square^{-1}\sqrt{2}\varepsilon^{XL}\varepsilon^{X'}{}_{L'}\tilde{\psi}_{(X'B'\ldots K')}\varepsilon_{XB}\varphi_L) \\
&\quad + proj_-\nabla\square^{-1}\sqrt{2}\varepsilon^{XL}\varepsilon^{X'}{}_{L'}\tilde{\psi}_{(B'X'\ldots K')}\varepsilon_{BX}\varphi_L) \\
&= proj_-\nabla\square^{-1}2\sqrt{2}\tilde{\psi}_{(B'L'\ldots K')}\varphi_B \\
&= proj_-\nabla_{AA'}\frac{2\sqrt{2}}{4(k+\frac{1}{2})}(\tilde{\psi}_{(B'L'\ldots K')}\varphi_A) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2(n-1)}\varepsilon_{AB}\nabla_{X(A'}(\varphi^X\tilde{\psi}_{B'L'\ldots K')}),
\end{aligned}$$

kde $n = 2(k+1)$ je počet indexů $\tilde{\psi}_{A'B'\ldots K'}$ čili dvojnásobek helicity nehmotného pole.

Druhý a třetí člen dohromady nakonec dávají

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}'_{A'B'\ldots L'} &= \tilde{\psi}_{(A'B'\ldots K'}\frac{\sqrt{2}}{4}\nabla_{|X|L')}\varphi^X + \frac{\sqrt{2}}{2(n-1)}\nabla_{X(B'}(\varphi^X\tilde{\psi}_{A'L'\ldots K')}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2(n-1)}\Bigg[\left(\nabla_{X(A'}\varphi^X\right)\tilde{\psi}_{L'B'\ldots K')} + \varphi^X\nabla_{X(A'}\tilde{\psi}_{B'\ldots K'L')} \\
&\quad + \frac{n-1}{2}\left(\nabla_{X(A'}\varphi^X\right)\tilde{\psi}_{L'B'\ldots K')}\Bigg] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2(n-1)}\left[\varphi^X\nabla_{X(A'}\tilde{\psi}_{B'\ldots K'L')} + \frac{n+1}{2}\left(\nabla_{X(A'}\varphi^X\right)\tilde{\psi}_{L'B'\ldots K')}\right]
\end{aligned}$$

Označíme-li $\rho_{A'} \equiv -i\frac{1}{2}\nabla_{XA'}\varphi^X$ jako v knize [**PR84**], je výraz v hranaté závorce roven

$$\gamma_{A'B'\ldots L'} \equiv \varphi^X\nabla_{X(A'}\tilde{\psi}_{B'\ldots K'L')} + i(n+1)\rho_{(A'}\tilde{\psi}_{L'B'\ldots K')}, \tag{29}$$

tedy pravé straně vztahu (6.4.20) v [**PR84**] (až na záměnu čárkovaných a nečárkovaných indexů).

2. Diskuse vztahu (29)

Penrose a Rindler uvádějí tento vztah jako příklad zvyšování helicity nehmotného pole:

TVRZENÍ 10. *Pokud $\psi_{A'B'\dots K'}$ splňuje rovnici pro nehmotné pole o helicitě $\frac{n}{2}$ a φ_L je řešením twistorové rovnice, pak*

$$\gamma_{A'B'\dots K'L'} = \varphi^X \nabla_{X(A'}\psi_{B'\dots K'L')} + i(n+1)\rho_{(A'}\psi_{L'B'\dots K')}, \tag{30}$$

kde $\rho_{A'} = -i\frac{1}{2}\nabla_{XA'}\varphi^X$, splňuje rovnici pro nehmotné pole o helicitě $\frac{n+1}{2}$.

DŮKAZ. Rovnice pro nehmotné pole má tvar $\nabla_A{}^{X'}\gamma_{X'B'\dots K'L'} = 0$. Splňuje-li ji $\psi_{A'B'\dots K'}$, pak

$$\begin{aligned}\nabla_A{}^{X'}\gamma_{X'B'\dots K'L'} &= \nabla_A{}^{X'}\left[\varphi^X\nabla_{X(X'}\psi_{B'\dots K'L')}\right] + i(n+1)\nabla_A{}^{X'}\left[\rho_{(X'}\psi_{L'B'\dots K')}\right]\\ &= \nabla_A{}^{X'}\left[\varphi^X\nabla_{XX'}\psi_{B'\dots K'L'}\right] + i\nabla_A{}^{X'}\Big[\rho_{X'}\varphi_{B'L'\dots K'} + \rho_{B'}\varphi_{X'L'\dots K'}\\ &\qquad + \rho_{L'}\varphi_{B'X'\dots K'} + \dots + \rho_{K'}\varphi_{B'L'\dots X'}\Big]\end{aligned}$$

Připomeňme, že $\psi_{A'B'\dots K'}$ je totálně symetrický spinor a je-li řešením rovnice pro nehmotné pole, pak

$$\nabla_{XX'}\psi_{B'\dots L'} = \nabla_{X(X'}\psi_{B')\dots L'} - \frac{1}{2}\varepsilon_{X'B'}\nabla_X{}^{Y'}\psi_{Y'\dots K'L'} = \nabla_{X(X'}\psi_{B'\dots L')},$$

tedy rovnice pro nehmotné pole je ekvivalentní rovnosti pravé a levé strany poslední rovnice. Twistorová rovnice $\nabla_{A'}{}^{(A}\psi^{L)} = 0$ má zase za důsledek

$$\nabla_{A'}{}^A\nabla_{B'}{}^B\varphi^L = \nabla_{A'}{}^A\frac{1}{2}\varepsilon^{BL}\nabla_{B'X}\varphi^X,$$

ale díky záměnnosti derivací i

$$\nabla_{A'}{}^A\nabla_{B'}{}^B\varphi^L = \nabla_{A'}{}^A\frac{1}{2}\varepsilon^{BL}\nabla_{B'X}\varphi^X = i\varepsilon^{AL}\nabla_{B'}{}^B\rho_{A'}.$$

Výraz $\nabla_{A'}{}^A\nabla_{B'}{}^B\varphi^L$ je tedy antisymetrický v indexech AL i BL, tudíž totálně antisymetrický v ABL a vzhledem k dvourozměrnosti základní spinorové reprezentace nulový. Z poslední rovnice pak vidíme, že $\rho_{A'}$ je konstatní spinor. Ze všech těchto pozorování plyne, že po použití Leibnizova pravidla zbydou pouze dva nenulové členy:

$$
\begin{aligned}
\nabla_A{}^{X'}\gamma_{B'\dots K'L'} &= \left(\nabla_A{}^{X'}\varphi^X\right)\nabla_{XL'}\psi_{X'B'\dots K'} + i\rho_{X'}\nabla_A{}^{X'}\psi_{B'K'\dots L'} \\
&= i\rho^{X'}\varepsilon_A{}^X\nabla_{XL'}\psi_{X'B'\dots K'} - i\rho^{X'}\nabla_{AX'}\psi_{B'K'\dots L'} \\
&= -i\rho^{X'}\varepsilon_{L'X'}\nabla_A{}^{Y'}\psi_{Y'B'\dots K'} = i\rho_{L'}\nabla_A{}^{Y'}\psi_{Y'B'\dots K'} = 0.
\end{aligned}
$$

□

Stejný výsledek plyne ovšem z obecné teorie mnohem přímočařeji. Operátor $\mathcal{D}^\eta$ je na nulté homologii roven (až na multiplikativní konstantu) právě twistorovému operátoru a na čárkované části homologie stupně 2 operátoru rovnice pro nehmotné pole a z Leibnizova pravidla (11) plyne tvrzení o zvyšování helicity ihned. V abstraktně indexovém důkazu jsme navíc použili řadu tvrzení, která platí pouze velmi speciálně, jako zaměnitelnost kovariantních derivací nebo nulovost výrazů totálně antisymetrických ve třech indexech. Oproti tomu obecná teorie vzbuzuje naději, že bude možné zvyšováním helicity konstruovat řešení rovnice pro nehmotné pole v nepřeberné škále dalších situací, počínaje jinou volbou modulu $\mathbb{W}$ přes vyšší twistorové operátory po prostoročasy jiných dimenzí a s nenulovou křivostí.

3. Dimenze 6

Pokusme se nyní v dimenzi 6 zopakovat reprezentační rozbor vztahu

$$
\tilde{F} = proj\,\Pi_3^\eta(\Pi_0^\eta repr\varphi \wedge \Pi_3^\eta repr F) \tag{31}
$$

Zajímáme se o řád 3, neboť tam se nyní nachází homologie obsahující totálně symetrické spinory $\Lambda^3\mathfrak{m}^* = -3\,|\,0\,\substack{2\\0} \;\oplus\; -3\,|\,0\,\substack{0\\2}$. Jako $\mathfrak{so}(8)$-modul $\mathbb{W}$ vezmeme analogicky s výpočty v dimenzi 4 reprezentaci s nejvyšší vahou $0\;0\,\substack{k\\0}$, která se podle lemmatu 2 rozpadá na součet

$$
0\,|\,0\,\substack{k\\0} \;\oplus\; -1\,|\,0\,\substack{k-1\\1} \;\oplus \dots \oplus\; -k\,|\,0\,\substack{0\\k}
$$

neboli

$$
\left(\tfrac{k}{2}\right)|\,0\,\substack{k\\0} \;\oplus\; \left(\tfrac{k}{2}-1\right)|\,0\,\substack{k-1\\1} \;\oplus \dots \oplus\; \left(-\tfrac{k}{2}\right)|\,0\,\substack{0\\k}
$$

Reprezentační typ modulu $\Lambda^3\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$ určíme rozkladem tenzorového součinu

$$
\bigoplus_{i=0}^{k} \left(\tfrac{k}{2}-i\right)\;0\,\substack{k-i\\i} \;\otimes\; \left((-2)\,|\,0\,\substack{2\\0} \;\oplus\; (-2)\,|\,0\,\substack{0\\2} \right)
$$

pomocí Klimykovy formule. Podle ní bude třeba znát váhy reprezentace ${}_{0}\,{}^{0}_{2} \oplus {}_{0}\,{}^{2}_{0}$ a jejich násobnosti, poté spočítat $\lambda+\lambda''+\delta$ neboli jejich součty s ${}_{0}\,{}^{k-i}_{i}$, zjistit, zda jsou fixovány nějakým elementem Weylovy grupy, pokud ne, nalézt dominantního reprezentanta jejich Weylovy orbity. Jej opětovně zmenšit o $\delta = {}_{1}\,{}^{1}_{1}$ a sečíst s koeficienty danými multiplicitami vah ${}_{0}\,{}^{0}_{2}$ a ${}_{0}\,{}^{2}_{0}$ a znaménky danými paritou počtu Weylových reflexí, které byly třeba k nalezení dominantního reprezentanta. Provedeme celý postup pro ${}_{0}\,{}^{2}_{0}$ formou tabulky:

${}_{0}\,{}^{2}_{0}$	${}_{1}\,{}^{k+3-i}_{i+1}$	$\forall i$ uvnitř WK	$+\ {}_{0}\,{}^{k+2-i}_{i}$
${}_{2}\,{}^{-2}_{0}$	${}_{3}\,{}^{k-1-i}_{i+1}$	$i \leq k-2$ uvnitř WK $i = k-1$ fixovaná α_2 $i = k \quad \xrightarrow{\alpha_2} \ {}_{2}\,{}^{1}_{k+1}$ uvnitř WK	$+\ {}_{2}\,{}^{k-2-i}_{i}$ $-\ {}_{1}\,{}^{0}_{k}$
${}_{1}\,{}^{0}_{0}$	${}_{2}\,{}^{k+1-i}_{i+1}$	$\forall i$ uvnitř WK	$+\ {}_{1}\,{}^{k-i}_{i}$
${}_{1}\,{}^{-1}_{-1}$	${}_{2}\,{}^{k-i}_{i}$	$1 \leq i \leq k$ uvnitř WK $i = 0$ fixovaná α_3 $i = k$ fixovaná α_2	$+\ {}_{1}\,{}^{k-1-i}_{i-1}$
${}_{0}\,{}^{1}_{-1}$	${}_{1}\,{}^{k+2-i}_{i}$	$i \geq 1$ uvnitř WK $i = 0$ fixovaná α_3	$+\ {}_{0}\,{}^{k+1-i}_{i-1}$
${}_{0}\,{}^{-1}_{1}$	${}_{1}\,{}^{k-i}_{i+1}$	$i \leq k-1$ uvnitř WK $i = k$ fixovaná α_2	$+\ {}_{0}\,{}^{k-1-i}_{i}$
${}_{0}\,{}^{0}_{-2}$	${}_{1}\,{}^{k+1-i}_{i-1}$	$i \geq 2$ uvnitř WK $i = 1$ fixovaná α_3 $i = 0 \quad \xrightarrow{\alpha_3} \ {}_{0}\,{}^{k+1}_{1}$ fixovaná α_1	$+\ {}_{0}\,{}^{k-i}_{i-2}$
${}_{-1}\,{}^{0}_{0}$	${}_{0}\,{}^{k-i}_{i}$	fixovaná α_1	
${}_{-1}\,{}^{1}_{1}$	${}_{0}\,{}^{k+1-i}_{i+1}$	fixovaná α_1	
${}_{-2}\,{}^{0}_{2}$	${}_{-1}\,{}^{k-i}_{i+2}$	$i = k$ fixovaná α_2 $i \leq k-1 \quad \xrightarrow{\alpha_1} \ {}_{1}\,{}^{k-i-2}_{i+1}$	 $-\ {}_{0}\,{}^{k-i-1}_{i}$

Dimenze reprezentace $\Lambda^n \mathfrak{m}^*$ algebry $\mathfrak{so}(2n+2)$ je $\binom{2n}{n}$, tedy dimenze ${}_{0}\,{}^{2}_{0}$ je $\frac{1}{2}\binom{6}{3} = 10$. Z toho vyplývá, že multiplicity všech vah ${}_{0}\,{}^{2}_{0}$ jsou jedna. Vysčítáním přes poslední sloupec tabulky dospějeme nakonec k závěru, že

$$
\begin{aligned}
(-2)\,|\,{}_{0}\,{}^{2}_{0} \otimes \left(\tfrac{k}{2}-i\right)|\,{}_{0}\,{}^{k-i}_{i} = {} & \bigoplus_{i=0}^{k} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|\,{}_{0}\,{}^{k+2-i}_{i} \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-2} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|\,{}_{2}\,{}^{k-2-i}_{i} \oplus \\
& \bigoplus_{i=0}^{k-1} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|\,{}_{1}\,{}^{k-i}_{i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k-1} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|\,{}_{1}\,{}^{k-1-i}_{i-1} \oplus \\
& \bigoplus_{i=1}^{k} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|\,{}_{0}\,{}^{k+1-i}_{i-1} \oplus \bigoplus_{i=2}^{k} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|\,{}_{0}\,{}^{k-i}_{i-2}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Rozklad druhé části $\Lambda^3\mathfrak{m}^*$, která má reprezentační typ $(-2)|0\,{}^{0}_{2}$, lze vyvodit z pozorování, že pokud $j = k - i$, pak $\left(\tfrac{k}{2}-i\right)|0\,{}^{k-i}_{i} = \left(-\tfrac{k}{2}+j\right)|0\,{}^{j}_{k-j}$ a tenzorový součin $(-2)|0\,{}^{0}_{2}$ a $\left(-\tfrac{k}{2}+j\right)|0\,{}^{j}_{k-j}$ se liší od prve spočítaného pouze konformními vahami a prohozenými koeficienty u spinorových fundamentálních vah. Tudíž

$$
\begin{aligned}
(-2)|0\,{}^{0}_{2} \otimes \left(\tfrac{k}{2}-i\right)|0\,{}^{k-i}_{i} = & \bigoplus_{i=0}^{k} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|0\,{}^{k-i}_{i+2} \oplus \bigoplus_{i=2}^{k} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|2\,{}^{k-i}_{i-2} \oplus \\
& \bigoplus_{i=1}^{k} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|1\,{}^{k-i}_{i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k-1} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|1\,{}^{k-1-i}_{i-1} \oplus \\
& \bigoplus_{i=0}^{k-1} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|0\,{}^{k-1-i}_{i+1} \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-2} \left(\tfrac{k}{2}-i-2\right)|0\,{}^{k-i-2}_{i}
\end{aligned} \tag{33}
$$

Homologii zde odpovídají části s reprezentačními typy $\left(\tfrac{k}{2}-2\right)|0\,{}^{k+2}_{0}$ a $\left(-\tfrac{k}{2}-2\right)|0\,{}^{0}_{k+2}$. Postup vedoucí od (22) k vyjádřením (25) a (26) je možné beze změn použít i zde:

$$
\Pi_3^{\eta} reprF = (\mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} (-Q\nabla)^i) reprF \tag{34}
$$

Reprezentační typ ∇ je $(-1)|1\,{}^{0}_{0}$ a Q je opět $\mathfrak{co}(6)$-ekvivariantní. Musíme tedy zjistit, jaké podmoduly $\Lambda^3\mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$ mohou být obrazem tenzorového součinu $(-1)|1\,{}^{0}_{0} \otimes \left(\left(\tfrac{k}{2}-2\right)|0\,{}^{k+2}_{0} \oplus \left(-\tfrac{k}{2}-2\right)|0\,{}^{0}_{k+2} \right)$, jaké mohou být obrazem tenzorového součinu těchto zobrazených podmodulů opět s $(-1)|1\,{}^{0}_{0}$ atd. Je jasné, že stačí zabývat se pouze $\left(-\tfrac{k}{2}-2\right)|0\,{}^{k+2}_{0}$, protože druhá část homologie má nejnižší možnou konformní váhu a tenzorový součin s ∇ by ji musel mít ještě o jedničku nižší.

Bude ale užitečné uvážit na místě $0\,{}^{k+2}_{0}$ obecněji váhu $0\,{}^{K-I}_{I}$. Váhy $1\,{}^{0}_{0}$ jsou $1\,{}^{0}_{0}$, $1\,{}^{-1}_{-1}$, $-1\,{}^{0}_{0}$, $-1\,{}^{1}_{1}$, $0\,{}^{-1}_{1}$, $0\,{}^{1}_{-1}$ a $0\,{}^{1}_{-1}$. Všechny mají multiplicitu jedna. Po přičtení $\lambda + \delta = 1\,{}^{K-I+1}_{I+1}$ je jisté jednak, že vzniklá váha bude dominantní, jednak že třetí a čtvrtá váha dají váhu fixovanou reflexí podle α_1. V rozkladu tenzorového součinu se objeví tyto váhy

$$
\begin{array}{ll}
1\,{}^{K-I}_{I} & \forall I \\
1\,{}^{K-I-1}_{I-1} & 1 \le I \le K \\
0\,{}^{K-I-1}_{I+1} & I \le K \\
0\,{}^{K-I+1}_{I-1} & I \ge 1
\end{array} \tag{35}
$$

Všimněme si, že horní koeficient oproti $0\,{}^{K-I}_{I}$ klesl nejvýše o jedna. Konformní váha se přitom také snížila o jedničku. Vyjdeme-li z váhy $\left(\tfrac{k}{2}-2\right)|0\,{}^{k+2}_{0}$ a zkoumáme-li, které váhy z rozkladů (32) a (33) s konformní vahou $\left(\tfrac{k}{2}-3\right)$ připadají v úvahu jako obrazy, stačí se podívat na horní koeficienty těchto vah. Jsou po řadě $k+1, k-3, k-1, k-2, k, k-1$ a $k-1, k-1, k-1, k-2, k-2, k-3$. Zde naopak klesá horní koeficient z $k+2$ *nejméně* o jedna. Možným obrazem ∇ je tedy nakonec jedině reprezentace $(\frac{k}{2}-3)|0\,{}^{k+1}_{1}$. Ve všech sumách se snižuje horní koeficient vždy o tolik, o kolik konformní váha, lze tedy argument prodloužit až do symbolického zápisu:

(36)
$$\Pi^\eta_3\left[\,(\tfrac{k}{2}-2)|0\,{}^{k+2}_{0}\,\right] = \left[\,(\tfrac{k}{2}-2)|0\,{}^{k+2}_{0}\,\right]^0 + \left[\,(\tfrac{k}{2}-3)|0\,{}^{k+1}_{1}\,\right]^1 + \ldots + \left[\,(-\tfrac{k}{2}-2)|0\,{}^{2}_{k}\,\right]^k$$

Za φ ve vztahu (31) vezmeme podobně jako v dimenzi 4 element nulté homologie při twistování modulem $0\;0\,{}^{1}_{0} = 0|0\,{}^{1}_{0} \otimes -1|0\,{}^{0}_{1}$, která má reprezentační typ $(\frac{1}{2})|0\,{}^{1}_{0}$. Z rozkladu (35) vidíme, že

$$\Pi^\eta_0\left[\,(\tfrac{1}{2})|0\,{}^{1}_{0}\,\right] = \left[\,(\tfrac{1}{2})|0\,{}^{1}_{0}\,\right]^0 + \left[\,(-\tfrac{1}{2})|0\,{}^{0}_{1}\,\right]^1 \tag{37}$$

Otázkou je, které elementy $\Pi^\eta_3\left[\,(\frac{k}{2}-2)|0\,{}^{k+2}_{0} \oplus (-\frac{k}{2}-2)|0\,{}^{0}_{k+2}\,\right] \otimes \Pi^\eta_0\left[\,(\frac{1}{2})|0\,{}^{1}_{0}\,\right]$ se zobrazují pomocí (26) – tedy zase opakovanými tenzorovými součiny s $(-1)|1\,{}^{0}_{0}$ – do $(\frac{k+1}{2}-2)|0\,{}^{k+3}_{0} \oplus (-\frac{k+1}{2}-2)|0\,{}^{0}_{k+3}$. Samy konformní váhy zaručí, že do první části se lze dostat jedině skrze

$$proj\left[\,(\tfrac{k}{2}-2)|0\,{}^{k+2}_{0}\,\right]^0 \otimes \left[\,(\tfrac{1}{2})|0\,{}^{1}_{0}\,\right]^0 \tag{38}$$

Dále vidíme, že nízká konformní váha podmodulu $\Pi^\eta_3\,(-\frac{k}{2}-2)|0\,{}^{0}_{k+2} = (-\frac{k}{2}-2)|0\,{}^{0}_{k+2}$ připouští pouze dva způsoby, jak z něj získat výraz s nenulovou projekcí na homologii, a sice

$$proj\left[\left[\,(-\tfrac{k}{2}-2)|0\,{}^{0}_{k+2}\,\right] \otimes \left[\,(-\tfrac{1}{2})|0\,{}^{0}_{1}\,\right]^1\right] \tag{39}$$

a

$$proj\nabla Q\left[\left[\,(-\tfrac{k}{2}-2)|0\,{}^{0}_{k+2}\,\right] \otimes \left[\,(\tfrac{1}{2})|0\,{}^{1}_{0}\,\right]^0\right] \tag{40}$$

V prvním případě je nenulovost projekce zřejmá (cílová reprezentace je Cartanovým součinem). Ve druhém stačí vzít v tenzorovém součinu opět element se součtovou vahou $0\,{}^{1}_{k+2}$ a podle třetího řádku (35) má součin této váhy s $1\,{}^{0}_{0}$ v rozkladu i $0\,{}^{0}_{k+3}$. Konformní vahou je $-\frac{k}{2}-2+\frac{1}{2}-1 = -\frac{k+1}{2}-2$.

Zbývá ukázat, že pro tenzorový součin (36) $\otimes$ (37) je $proj_{-}(\mathrm{Id}+\sum_{i=1}^{\infty}(-\nabla Q)^{i})$ nula. Fundamentální reprezentace $1\,{}^{0}_{0}$, $0\,{}^{1}_{0}$ a $0\,{}^{0}_{1}$ mají váhy

$1\,{}^{0}_{0}$	$0\,{}^{1}_{0}$	$0\,{}^{0}_{1}$
$-1\,{}^{1}_{1}$	$1\,{}^{-1}_{0}$	$1\,{}^{-1}_{0}$
$0\,{}^{-1}_{1}$	$-1\,{}^{0}_{1}$	$-1\,{}^{0}_{1}$
$0\,{}^{1}_{-1}$	$0\,{}^{0}_{-1}$	$0\,{}^{0}_{-1}$
$1\,{}^{-1}_{-1}$		
$-1\,{}^{0}_{0}$		

Všechny s multiplicitou jedna. Vyskytují se v nich pouze čísla ± 1 a 0, takže váha $\lambda+\lambda''+\delta$ v Klimykově formuli bude vždy dominantní. Suma v Klimykově formuli tedy bude pouze součtem $ch_{\lambda+\lambda''}$ pro ty $\lambda\in\Pi(\lambda')$, pro něž je $\lambda+\lambda''$ dominantní, neboli nemá nikde koeficient -1. Je tedy jasné, že v tenzorovém součinu nějaké váhy s libovolnou fundamentální vahou se budou vyskytovat pouze váhy s koeficienty lišícími se od původní váhy nejvýše o jedničku.

Nyní si všimněme, že v (36) je součet konformní váhy a dolního koeficientu roven pro všechny členy $\frac{k}{2}-2$. V komponentách tenzorového součinu s (37) bude toto číslo nejvýše $\frac{k}{2}-\frac{1}{2}$, neboť konformní váha je nejvýše $\frac{1}{2}$ a dolní koeficient maximálně 1. Stejná horní mez ovšem platí pro libovolný výsledek aplikace $(\nabla Q)^{i}$, neboť tenzorový součin s $(-1)|1\,{}^{0}_{0}$ snižuje konformní váhu o jedna a dolní koeficient nezvyšuje o více než jedna. Pak ale žádná z ireducibilních podreprezentací $(\mathrm{Id}+\sum_{i=1}^{\infty}(-\nabla Q)^{i})$ [(36) $\otimes$ (37)] nemůže mít nenulovou projekci na druhou část homologie, protože ta má součet konformní váhy a dolního koeficientu roven $-\frac{k+1}{2}-2+k+3=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}$, o jedna vyšší. Provedená úvaha dokazuje následující tvrzení:

Tvrzení 11. *Je-li ψ řešením rovnice pro nehmotné pole o spinu $\frac{k}{2}$ v šesti dimenzích a φ řešením twistorové rovnice pro spin $\frac{1}{2}$, pak*

$$\psi' = -proj_{-}(\psi\otimes Q\nabla\varphi) - proj_{-}\nabla Q(repr_{-}\psi\otimes repr\varphi) \tag{41}$$

je řešením rovnice pro nehmotné pole o spinu $\frac{k+1}{2}$.

Tvrzení je samozřejmě založeno na určité interpretaci či spíše extrapolaci. Pojem nehmotné pole o spinu $\frac{k}{2}$ má ve čtyřech dimenzích význam zobrazení z Minkowského prostoročasu do k-té symetrické spinorové mocniny základní spinorové reprezentace. To je v šesti dimenzích zachováno - je to ale poslední dimenze, v níž je k-tá symetrická mocnina základní spinorové reprezentace ireducibilní. Pojem twistorové rovnice a rovnice pro nehmotné pole je zase založen na rámci, který je pro příslušné operátory vybudován teorií BGG posloupností - v dimenzi 4 jsou operátory na odpovídajících pozicích BGG posloupnosti právě fyzikálním twistorovým operátorem a operátorem rovnice pro nehmotné pole.

Cesta do vyšších dimenzí bude muset být vedena jednak zmíněným rámcem, jednak bude muset úžeji interpretovat pojem pole o spinu $\frac{k}{2}$. Jako nejpřirozenější se nabízí zachovat požadavek ireducibility a pokládat za takové pole zobrazení do reprezentace $0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ \substack{k \\ 0}$ případně $0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ \substack{0 \\ k}$. Za takového předpokladu můžeme zkusit užít ke zobecnění tvrzení 11 podobné úvahy jako ty, které k němu vedly.

4. Dimenze $2n$

Jako $\mathfrak{so}(2n+2)$-modul $\mathbb{W}$ zvolme tedy opět modul $0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ \substack{k \\ 0}$, který se podle lemmatu (2) rozpadá na součet $\mathfrak{co}(2n)$-modulů $\left(\frac{k}{2}\right) | 0\ 0 \ldots 0\ 0\ \substack{k \\ 0} \oplus \left(\frac{k}{2}-1\right) | 0\ 0 \ldots 0\ 0\ \substack{k-1 \\ 1} \oplus \ldots \oplus \left(-\frac{k}{2}\right) | 0\ 0 \ldots 0\ 0\ \substack{0 \\ k}$. Budeme se zajímat o cup součin

$$\tilde{F} = proj \Pi_n^\eta (\Pi_0^\eta repr \varphi \wedge \Pi_n^\eta repr F). \tag{42}$$

Bylo by ovšem nyní neúnosné snažit se podobně jako v dimenzi 6 rozložit explicitně tenzorový součin $\Lambda^n \mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$. Klimykova formule předpokládá znalost všech vah jedné z reprezentací, což bylo splnitelné, dokud byla dimenze $\Lambda^n \mathfrak{m}^*$ malá, v dimenzi 6 rovná 20. Pro vyšší dimenze ovšem toto číslo rychle roste a množinu vah je obtížné popsat příhodně pro hledání $t(\lambda + \lambda'' + \delta)$ a $\{\lambda + \lambda'' + \delta\}$. V obou dosud prozkoumaných případech jsme ale viděli, že fakticky potřeba je jenom malá část ireducibilních podreprezentací $\Lambda^n \mathfrak{m}^* \otimes \mathbb{W}$ zahrnutá v opakovaných tenzorových součinech homologie $\left(\frac{k}{2}-2\right) | 0\ 0 \ldots 0\ 0\ \substack{k+2 \\ 0} \oplus \left(-\frac{k}{2}-2\right) | 0\ 0 \ldots 0\ 0\ \substack{0 \\ k+2}$ s vektorovou reprezentací $(-1) | 1\ 0 \ldots 0\ 0\ \substack{0 \\ 0}$. Pokusme se tedy dokázat to obecně:

TVRZENÍ 12. *Pokud $F \in H_n(W)$, pak*

$$
\begin{aligned}
\Pi_n^n repr F &= (\mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} (-Q\nabla)^i) repr F \\
&= \left[\ \left(\tfrac{k}{2}-2\right) | \, 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{k+2}_{0} \ \right]^0 + \left[\ \left(\tfrac{k}{2}-3\right) | \, 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{k+1}_{1} \ \right]^1 + \dots \\
&\quad \dots + \left[\ \left(-\tfrac{k}{2}-2\right) | \, 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{2}_{k} \ \right]^k + \left[\ \left(-\tfrac{k}{2}-2\right) | \, 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{0}_{k+2} \ \right]^0,
\end{aligned}
$$

kde horní indexy u hranatých závorek označují diferenciální řád členu.

DŮKAZ. Váhy vektorové reprezentace, která odpovídá operátoru ∇, jsou

$$
\begin{array}{ll}
1\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{0}_{0} & -1\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{0}_{0} \\
-1\ 1\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{0}_{0} & 1\ -1\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{0}_{0} \\
0\ -1\ 1 \dots 0\ 0\, {}^{0}_{0} & 0\ 1\ -1 \dots 0\ 0\, {}^{0}_{0} \\
\dots & \dots \\
0\ 0\ 0 \dots -1\ 1\, {}^{0}_{0} & 0\ 0\ 0 \dots 1\ -1\, {}^{0}_{0} \\
0\ 0\ 0 \dots 0\ -1\, {}^{1}_{1} & 0\ 0\ 0 \dots 0\ 1\, {}^{-1}_{-1} \\
0\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{1}_{-1} & 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{-1}_{1}
\end{array}
$$

Podle Klimykovy formule obsahuje tenzorový součin $\Gamma_{\lambda'} \otimes \Gamma_{\lambda''} = 1\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{0}_{0} \otimes 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{K-I}_{I}$ pouze ty váhy $\lambda + \lambda''$, $\lambda \in \Pi(\lambda')$, které jsou dominantní, neboli žádný koeficient nemají roven -1. Jsou to

$$
\begin{array}{ll}
1\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{K-I}_{I} & \forall I \\
0\ 0\ 0 \dots 0\ 1\, {}^{K-I-1}_{I-1} & 1 \le I \ \le K \\
0\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{K-I-1}_{I+1} & I \ \le K \\
0\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{K-I+1}_{I-1} & I \ \ge 1
\end{array}
\tag{43}
$$

Jelikož váhy reprezentace $\Lambda^n \mathfrak{m}^* = 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{2}_{0} \oplus 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{0}_{2}$ jsou součty prvků n-prvkových podmnožin vah vektorové reprezentace $1\ 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{0}_{0}$, nemůže se jako horní koeficient (ani nikde jinde) vyskytnout číslo větší než dva. To vidíme přímo ze seznamu vah vektorové reprezentace - pro každý koeficient existují jen čtyři váhy, v nichž je nenulový, a z toho jen dvě, kde je $+1$. Na počátku je na místě $repr_+ F$ váha $\left(\tfrac{k}{2}-2\right) | \, 0\ 0 \dots 0\ 0\, {}^{k+2}_{0}$, která tedy má ze všech vah v tenzorovém součinu majících tutéž konformní váhu maximální možný horní koeficient. A protože působení ∇ snižuje konformní váhu o jedničku a maximální horní koeficient je u vah s o jedna menší konformní vahou také o jedna menší, mohou být nenulové nejvýše dvě projekce ze čtyřech možných podle (43), a sice druhá a třetí. Je-li $I = 0$ jako je tomu na počátku, pak dokonce pouze třetí.

LEMMA 23. *Nechť λ je silně dominantní váha a μ taková váha, že $\lambda + \mu$ je také silně dominantní. Pak podmínka $\lambda + \mu = \{\lambda + \nu\}$ implikuje, že buď $\mu = \nu$, nebo $|\mu| < |\nu|$.*

DŮKAZ. Je zřejmé, že pro $\mu = \nu$ a $\{\}$ akci jednotky Weylovy grupy je podmínka splněna. Představme si nyní váhy jako vektory v n-rozměrném vektorovém prostoru a Weylovu grupu jako podgrupu $O(n)$ generovanou reflexemi podle stěn Weylovy komory neboli nadrovin kolmých na jednoduché kořeny. Označme S_0 množinu obsahující pouze silně dominantní váhu λ. S_1 budiž množina vah, které vzniknou z λ reflexí podle jednoduchých kořenů. Dále konstruujme z množiny S_k množinu S_{k+1} tak, že v $\lambda' \in S_{k+1}$ právě když existuje α_i jednoduchý kořen, že $\lambda' = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i \rangle \alpha_i$ pro nějaké $\lambda \in S_k$, pro které je $\langle \lambda, \alpha_i \rangle > 0$. Jinými slovy, S_{k+1} získáme všemi možnými reflexemi vah v S_k, které se projeví odečtením pozitivního kořene. Sjednocení všech S_k je konečná podmnožina orbity λ, takže pro nějaké k_0 je S_{k_0+1} prázdná. Je to celá orbita Weylovy grupy? Celou orbitu bychom dostali, pokud bychom se neomezovali na reflexe podle některých kořenů, ale používali vždy všech reflexí. Předpokládejme, že existuje váha $\lambda_{n-1} = \sigma_{n-1} \ldots \sigma_1(\lambda) \in \bigcup S_j$, přičemž $\lambda_n = \sigma_n(\lambda_{n-1})$ už v $\bigcup S_j$ není. Pokud $\forall \alpha_i$ jednoduché kořeny je $\langle \lambda_n, \alpha_i \rangle > 0$, pak je λ_n silně dominantní a protože leží na orbitě λ, musí být $\lambda_n = \lambda$, což je spor. Nelze mít $\langle \lambda, \alpha_i \rangle = 0$ pro žádné i, protože žádný prvek orbity silně dominantní váhy nemůže být fixován nějakou reflexí. Tedy existuje α_l, pro něž $\langle \lambda, \alpha_l \rangle < 0$. Pokud $\lambda_{n+1} \equiv \sigma_l(\lambda_n) \in \bigcup S_j$, $\sigma_l(\lambda_{n+1}) = \lambda_n \in \bigcup S_j$, spor. Pokud ne, nalezneme α_{l+1}, pro něž $\langle \lambda, \alpha_{l+1} \rangle < 0$ a máme tytéž možnosti. Po konečném počtu kroků dospějeme do buď do $\bigcup S_j$, nebo Weylovy komory, která ovšem obsahuje jediný prvek, $\lambda \in S_0$. Zpětnou aplikací nalezených reflexí opět zjistíme, že $\lambda_n \in \bigcup S_j$.

Je-li λ silně dominantní a W_{α_i} reflexe podle jednoduchého kořenu, pak jejich spojnice ve váhovém prostoru protíná kolmo hyperstěnu Weylovy komory a průsečík je v polovině této spojnice. Zřejmě tedy každá silně dominantní váha má nižší vzdálenost od λ než od $W_{\alpha_i}(\lambda)$. Nechť nyní W_{α_j} je reflexe podle jednoduchého kořene a λ_{j-1} váha, pro niž $\langle \lambda_{j-1}, \alpha_i \rangle > 0$. Osová nadrovina definující reflexi W_{α_j} je současně stěnou Weylovy komory, přičemž ta se nachází ve stejném poloprostoru jako λ_{j-1}, neboť silně dominantní váhy mají také kladný skalární součin s α_j. Podle stejné geometrické úvahy je $|\lambda + \mu - \lambda_{j-1}| < |\lambda + \mu - W_{\alpha_j}(\lambda_{j-1})|$. Pokud tedy zapíšeme prvek orbity Weylovy grupy, pro který $W(\lambda + \nu) = \{\lambda + \nu\}$ pouze pomocí reflexí odčítajících kladný kořen $W(\lambda) = W_{\alpha_n} \dots W_{\alpha_1}(\lambda)$, vidíme, že $|\nu| = |W(\nu)| = |\lambda + \mu - W(\lambda)| > |\mu|$. □

Podle Klimykovy formule mohou v tenzorovém součinu figurovat pouze dominantní váhy tvaru $\{\lambda + \lambda'' + \delta\} - \delta$. Pro váhu tvaru $\lambda'' = {\scriptstyle 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0}\, {}^{k-i}_{i}$ to znamená nalézt možné váhy $\lambda \in \Pi(\lambda')$, pro něž

$$ {\scriptstyle 1\ 1\ 1 \ldots 1\ 1}\, {}^{k+3-i}_{i+1} = \{ {\scriptstyle 1\ 1\ 1 \ldots 1\ 1}\, {}^{k+1-i}_{i+1} + \lambda \} $$

Podle lemmatu $\lambda = {\scriptstyle 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0}\, {}^{2}_{0}$, což samozřejmě je váha reprezentace ${\scriptstyle 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0}\, {}^{2}_{0}$, ale všechny další λ by musely mít větší normu, což není možné, ${\scriptstyle 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0}\, {}^{2}_{0}$ je nejvyšší váha a její norma je maximální a rovná $\sqrt{n}$, neboť její souřadnice v ortonormální bázi váhového prostoru jsou $(1, 1, \dots, 1, 1)$. Naproti tomu podmínka

$$ {\scriptstyle 1\ 1\ 1 \ldots 1\ 2}\, {}^{k+3-i}_{i-1} = \{ {\scriptstyle 1\ 1\ 1 \ldots 1\ 1}\, {}^{k+1-i}_{i+1} + \lambda \}, $$

kde předpokládáme $2 \leq i \leq k$, aby byla levá strana silně dominantní, by mohla být splněna buďto vahou $\lambda = {\scriptstyle 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 1}\, {}^{2}_{-2}$, nebo nějakou delší vahou. Vyjádřena ve standardních souřadnicích má tato váha tvar $(1, 1, \dots, 0, 2)$ a normu tedy $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$, takže žádná taková váha v $\Pi({\scriptstyle 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0}\, {}^{2}_{0})$ není.

Tedy jediná reprezentace v obrazu ${\scriptstyle (\frac{k}{2} - i - 2) | 0\ 0 \ldots 0\ 0}\, {}^{k+2-i}_{i}$ pomocí ∇ je ${\scriptstyle (\frac{k}{2} - i - 3) | 0\ 0 \ldots 0\ 0}\, {}^{k+1-i}_{i+1}$. Působením $(1 - \sum(-Q\nabla)^i)$ na část $reprF$ s konformní vahou $\frac{k}{2} - 2$ tedy dostaneme kromě ní samé dalších k členů, které ve tvrzení následují. Poslední člen je výsledkem působení identity na druhou část $reprF$ a působení ∇ na něj dává nulu, neboť má nejnižší možnou konformní váhu. □

Váhy základních spinorových reprezentací mají ve standardní reprezentaci souřadnice $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \dots, \pm\frac{1}{2})$, nejvyšší váha ostatních fundamentálních reprezentací je $(1, 1, \dots, 1_k, 0, \dots, 0)$, kde k je pozice jednotky ve vyjádření pomocí ${\scriptstyle 0\ 0\ 1 \ldots 0\ 0}\, {}^{0}_{0}$. Tvoří tedy bázi pro podprostor definovaný vynecháním posledních dvou souřadnic ve standardní reprezentaci. Základní spinorové reprezentace mají nejvyšší váhu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2})$, takže každá váha z obou spinorových reprezentací se dá napsat jako celočíselná lineární kombinace nespinorových vah plus nebo mínus nejvyšší váha některé ze spinorových reprezentací. Tedy v rozvoji do fundamentálních vah bude mít každá váha základní spinorové reprezentace horní a dolní koeficient v množině $\{-1, 0, 1\}$. Všechny váhy mají opět multiplicitu jedna a také každá váha kromě nejvyšší v každé ze spinorových reprezentací musí mít u některé fundamentální váhy koeficient -1. Jsou tedy zachovány všechny klíčové body úvahy, kterou jsme prováděli v dimenzi 6 a která zaručila, že jediné dva výrazy, které cup součin zobrazí do homologie, jsou analogony (39) a (40). Jmenovitě vidíme, že i nyní se budou v tenzorovém součinu s vektorovou nebo některou ze spinorových reprezentací vyskytovat pouze váhy s koeficienty lišícími se nejvýše o jedničku, i nyní je součet konformní váhy a dolního koeficientu v prvních $k+1$ výrazech pravé strany tvrzení (12) roven konstantně $\frac{k}{2} - 2$, takže tenzorovými součiny s některou spinorovou a posléze s vektorovými reprezentacemi lze získat nanejvýš reprezentaci, která bude mít tento součet $\frac{k}{2} - \frac{1}{2}$, přičemž cílová homologie má $\frac{k}{2} + \frac{1}{2}$. Poslední člen ve tvrzení (12) potom má natolik nízkou konformní váhu, že se do homologie může zobrazit pouze projekcí součinu s $\left(\frac{1}{2}\right)|0\ 0 \ldots 0\ 0\ {}^{1}_{0}$ a poté s $(-1)|1\ 0 \ldots 0\ 0\ {}^{0}_{0}$, nebo projekcí součinu s $\left(-\frac{1}{2}\right)|0\ 0 \ldots 0\ 0\ {}^{0}_{1}$. Nenulovost obou projekcí je opět téměř očividná - v obou případech se bere nejprve Cartanův součin, v prvním potom složíme působení ∇ s projekcí na reprezentaci ve třetím řádku (43).

TVRZENÍ 13. *Je-li ψ řešením rovnice pro nehmotné pole o spinu $\frac{k}{2}$ ve $2n$ dimenzích a φ řešením twistorové rovnice pro spin $\frac{1}{2}$, pak*

$$\psi' = -proj_-(\psi \otimes Q\nabla\varphi) - proj_-\nabla Q(repr_-\psi \otimes repr\varphi) \tag{44}$$

je řešením rovnice pro nehmotné pole o spinu $\frac{k+1}{2}$.

Závěr

Podařilo se nám zasadit Penrosem a Rindlerem zavedené zvyšování helicity nehmotného pole do kontextu nedávných matematických výsledků v geometrii a teorii reprezentací, a zobecnit je do vyšších dimenzí. Ukazuje to, že Calderbankem a Diemerem objevená multiplikativní struktura a v širším kontextu celá klasifikace invariantních diferenciálních operátorů pomocí BGG posloupností má význam pro matematickou fyziku. Umožňuje mezi sebou převádět řešení rovnic pro nehmotné pole o různých helicitách pomocí řešení twistorové rovnice, zejména vytvářet z řešení bezezdrojových Maxwellových rovnic řešení rovnic pro linearizovanou gravitaci. Další možné aplikace bilineárních párování jsme viděli v kapitole 1.

Máme-li k dispozici takto obecnou teorii, není těžké navrhnout, v jakých směrech by bylo možné výsledky práce studovat dále. Zde jsme si vybrali ty BGG posloupnosti a operátory, u nichž je fyzikální interpretace nejprůhlednější. Naše rovnice jsou rovnicemi prvního řádu pro symetrické spinory v plochém prostoročase. Příklad Bachovy teorie, kde má analogie Einsteinových rovnic diferenciální řád 4, ovšem ukazuje, že i rovnice vyšších řádů, než jsou ve fyzice etablované řády 1 a 2, by mohly mít svůj význam a vyplatí se je studovat.

Podobně zajímavé by bylo zjistit, k jakým modifikacím vede přítomnost křivosti. Víme, že tvar párování definujícího zvyšování helicity na křivosti nezávisí, ale víme také, že křivost přidává do Leibnizovy formule komplikovaný obstrukční člen, jenž zřejmě v drtivé většině případů způsobí, že vzniklý spinor o vyšší helicitě už nebude řešit rovnici pro nehmotné pole. Je ale možné, že za určitých předpokladů na křivost tento člen vymizí, případně že lze zkonstruovat modifikované párování splňující přesnou Leibnizovu formuli.

Konečně z matematického hlediska může být zajímavé, zda vedou k párování Penroseova a Rindlerova typu všechny moduly $\mathbb{W}$ ve všech (např. i lichých) dimenzích, případně zda existuje jednoduchý explicitní vztah mezi řádem párování a výchozím modulem $\mathbb{W}$, podobný formulím a algoritmům, které počítají z reprezentačních dat modulu $\mathbb{W}$ řády unárních operátorů $\mathcal{D}^p$ v BGG posloupnosti pro různé parabolické geometrie.

Literatura

[CD99] Calderbank, D. M. J., Diemer, T.: *Differential invariants and curved Bernstein-Gelfand-Gelfand sequences*, Edinburgh Preprint MS-99-010 (1999). E-print math.DG/0001158

[PR84] Penrose, R., Rindler, W.: *Spinors and space-time*, Cambridge University Press, Cambridge (1984).

[WW90] Ward R. S., Wells R. O.: *Twistor geometry and field theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[Di99] Diemer, T.: *Conformal geometry, representation theory and linear fields*, PhD Thesis, Universität Bonn (1999).

[CDS00] Calderbank, D. M. J., Diemer, T., Souček, V.: *Ricci corrected derivatives and invariant differential operators*, Edinburgh Preprint MS-00-021 (2000).

[Hu72] Humphreys, J. E.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics **7**, Springer-Verlag, New York (1972).

[FH99] Fulton, W., Harris, J.: *Representation Theory: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics **129**, Springer-Verlag, New York (1999).

[So00] Souček, V.: *Reprezentace Lieových grup a algeber*, text k přednášce na MFF UK, Praha (2000), http://adela.karlin.mff.cuni.cz/ soucek/semestr1/lalng.ps

[Sl96] Slovák, J.: *Reprezentace Lieových algeber a Lieových grup*, zápisky ze semináře na MU, Brno (1996)
ftp://www.math.muni.cz/pub/math/people/Slovak/lectures/seminar.lie/lie.ps

[BE89] Baston, R. J., Eastwood M. G.: *The Penrose Transform: Its Interaction with Representation Theory*, Clarendon Press, Oxford (1989).

[CSS00] Čap, A., Slovák, J., Souček, V.: *Invariant operators on manifolds with almost hermitian symmetric structures, III. Standard operators*, Diff. Geom. Appl., **12** (2000), 51-84

[CSS01] Čap, A., Slovák, J., Souček, V.: *Bernstein-Gelfand-Gelfand sequences*, Annals of Mathematics 154, **1** (2001), 97-113

[Sl93] Slovák, J.: *Natural operators on conformal manifolds*, dizertace, Masarykova univerzita, Brno (1993).

[Sh97] Sharpe, R. W.: *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, Graduate Texts in Mathematics **166**, Springer-Verlag, New York (1997).

[Ba91] Baston, R. J.: *Almost hermitian symmetric manifolds, II Differential invariants*, Duke Math. J. **63** (1991), 113-138

[Se97] Severa, V.: *Invariant differential operators on spinor valued differential forms*, dizertace, MFF UK, Praha (1997).

[Ko61] Kostant, B.: *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. Math. **74** (1961), 329-387

[BGG71] Bernstein, I. N.,Gelfand, I. M., Gelfand, S. I.: *Structure of representations generated by vectors of highest weight*, Functional Anal. Appl. **5** (1971), 1-8