Vybrané partie z funkcionální analýzy

Sada 1

1. Vysvětlete, proč se v Rieszově lemmatu o skorokolmici (Lukeš 9.1) požaduje uzavřenost podprostoru M.
2. Na ℓ^1 uvažujme funkcionál
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n$$
a uzavřený podprostor $M := Kerf$. Dokažte, že neexistuje $x \in \ell^1$, $\|x\|_1 = 1$, pro nějž $dist(x, M) = 1$. V Rieszově lemmatu o skorokolmici tedy není možné dosáhnout „kolmosti“.
3. Ukažte, že lineární zobrazení
$$\begin{aligned} T &: c_0 \to c_0 \\ &: \{x_n\} \mapsto \{\frac{1}{n} x_n\} \end{aligned}$$
je spojité, ale není otevřené.
4. Ukažte, že libovolná kompaktní podmnožina v $\mathbb{C}$ je spektrem nějakého operátoru na separabilním Hilbertově prostoru.
5. Nechť $c \equiv \{c_n\}_1^\infty$ je posloupnost komplexních čísel taková, že pro každou $a \in \ell^1$ existuje limita
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} a_n c_n$$
Ukažte pomocí principu stejnoměrné omezenosti, že pak musí být $c \in \ell^\infty$.
6. Nechť $c \equiv \{c_n\}_1^\infty$ je posloupnost komplexních čísel taková, že pro každou $a \in c_0$ existuje limita
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} a_n c_n$$
Ukažte pomocí principu stejnoměrné omezenosti, že pak musí být $c \in \ell^1$.
7. Nechť $B : X \times X \to \mathbb{C}$ je bilineární zobrazení na Banachově prostoru X, které je spojité v každé proměnné zvlášť (tedy $\forall y$ a $x_n \to x$ je $B(x_n, y) \to B(x, y)$ a obráceně). Dokažte pomocí principu stejnoměrné omezenosti, že pak je spojité v obou proměnných zároveň (tedy pokud $x_n \to x$, $y_n \to y$, pak $B(x_n, y_n) \to B(x, y)$).
8. Nechť T je operátor na Hilbertově prostoru H splňující $(Tx, y) = (x, Ty)$ pro všechna $x, y \in H$. Dokažte pomocí principu stejnoměrné omezenosti, že pak je T omezený operátor.