Matematický proseminář

Sada 6, LS 13/14

1. Stirlingovo číslo prvního druhu $\left[{n \atop k}\right]$ vyjadřuje počet rozdělení n-prvkové množiny na k cyklů. Například $\left[{3 \atop 1}\right] = 2$, protože množinu $1, 2, 3$ lze zapsat ve formě jednoho cyklu dvěma způsoby: $(1, 2, 3)$ a $(3, 2, 1)$. Spočtěte $\left[{n \atop 1}\right]$ a $\left[{n \atop 2}\right]$ a dokažte rekurenci

   $$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

   Dokažte, že pro n kladná celá platí

   $$x^{\underline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$$

2. Ukažte, že pravděpodobnostní generující funkce pro vyváženou šestistěnnou kostku je

   $$G(z) = \frac{1}{n} z \frac{1-z^6}{1-z}$$

   Spočítejte hodnoty $G^{(m)}(1)$ pomocí Taylorova rozvoje $G(1+t)$ a určete pomocí nich střední hodnotu a rozptyl.

3. Po napnutém gumovém pásu délky jeden metr leze červ rychlostí 1cm/min. Pás je na jednom konci uchycen ke stěně a na druhém konci ho drží zlomyslný matematik. Každou celou minutu matematik za pás zatáhne a prodlouží ho o další metr. Doleze někdy červ až ke stěně? Předpokládejme nekonečnou výdrž obou aktérů i pásu. Při protažení pásu se zachovává červova relativní poloha v rámci pásu.

4. Pomocí funkce $\Delta^n (x-1)^{\underline{-1}}$ odvoďte rozklad racionální funkce

   $$\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

   na parciální zlomky. Odvoďte odtud identitu

   $$\sum_{j=0}^{m} \frac{\binom{m}{j}}{\binom{r}{j}} = \frac{r+1}{r+1-m}$$

   platnou pro $m \geq 0$ celé a r nerovnající se $0, 1, \ldots, m-1$.

5. Uvažujme balíček n karet ležících na stole, přičemž i-tá karta odshora přesahuje kartu pod sebou o vzdálenost d_{i+1}. (Pro jednoduchost předpokládejme, že délka každé karty je 2). Jaké nejvyšší hodnoty d_{n+1} (tedy přesahu vnější hrany horní karty přes hranu stolu) lze dosáhnout, aniž by se balíček zhroutil a spadl se stolu?

6. Jaká je pravděpodobnost, že horní i spodní karta zamíchaného balíčku mariášových karet jsou obě esa?
7. Určete pravděpodobnostní generující funkci pro Poissonovo rozdělení $P(X = k) = e^{-\mu}\frac{\mu}{k!}$, $k \geq 0$. Určete pomocí ní střední hodnotu a rozptyl.
8. Ukažte, že každé přirozené číslo n je možné jednoznačně zapsat jako

$$n = \binom{a}{1} + \binom{b}{2} + \binom{c}{3},$$

kde $0 \leq a < b < c$ jsou přirozená čísla.