Úvod do teorie Lieových grup

Materiál k přednášce

Dalibor Šmíd

31. března 2010

Disclaimer: Tento text zatím vzniká bez jasného záměru o jeho struktuře. Jeho prvním cílem je poskytnout jakýsi rozšířený sylabus plus rozcestník ke vhodné literatuře plus sbírku jednoduchých úloh k vlastnímu rozmyšlení. Reference na konci se týkají dosud odpřednesené látky, pro další kapitoly budou zas trochu jiné. Zatím jsou jen v googlovací formě. Notace se mění knížku od knížky (tečné zobrazení k L_g může být jednou $(L_g)_*$, jindy $d(L_g)$ a jindy $T(L_g)$), jedním z cílů tohoto textu je jakési její sjednocení. Edit: Zatím se text vyvíjí tak, že za důležitými větami následuje seznam poznámek, které zahrnují všechno možné od alternativních formulací, významu věty, komentáře k předpokladům, poznámek či referencí k důkazu, důsledků a příkladů. Jednodušší důkazy se snažím odsunout do poznámek pod čarou, aby tolik nenarušovaly plynulost textu.

1 Lieova grupa

Definice 1. Nechť G je hladká varieta, která je zároveň grupou. Nechť zobrazení $\mu : G \times G \to G$ (násobení v grupě) a $\iota : G \to G$ (inverze v grupě) jsou hladká zobrazení variet. Pak nazveme G **Lieovou grupou**.

Definice 2. Nechť H je podgrupa G, která je zároveň uzavřenou podvarietou G. Pak nazýváme H **Lieovou podgrupou**.

Poznámka. Rozlišujeme tedy mezi podgrupou a vnořenou podgrupou podobně jako mezi uzavřenou podvarietou a vnořenou podvarietou. To první je podvarieta, která se dá lokálně charakterizovat jako nulová podmnožina hladké funkce. To druhé je obraz variety pomocí vzájemně jednoznačného zobrazení, které má všude injektivní diferenciál (vnoření). Příkladem je vnoření otevřeného intervalu do $\mathbb{R}^2$ jako „číslice šest“. Ve „vrcholu stupně 3“ není struktura vnořené podvariety restrikcí struktury variety na $\mathbb{R}^2$.

Definice 3. Hladké zobrazení Lieových grup, které je zároveň grupovým homomorfismem, nazýváme **homomorfismem Lieových grup**. Homomorfizmus $G \to \mathrm{Aut}(V)$ se nazývá reprezentace G na V.

Definice 4. Komplexní Lieova grupa je taková Lieova grupa, která je zároveň komplexní varietou, čili varietou s holomorfním atlasem, a na níž jsou násobení a inverze holomorfní funkce. Holomorfní homomorfismus komplexních Lieových grup nazýváme **homomorfismem komplexních Lieových grup**.

Příklady:

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ je Lieova grupa.
2. $\langle 0, 2\pi)$ se sčítáním modulo 2π je Lieova grupa, označme S^1.
3. $S^1 \times \ldots \times S^1$ se sčítáním po složkách je Lieova grupa (torus T^n).
4. $GL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), SO(k,l,\mathbb{R}), Sp(n,\mathbb{R})$ jsou Lieovy grupy.
5. $GL(n,\mathbb{C}), SL(n,\mathbb{C}), SO(n,\mathbb{C}), Sp(n,\mathbb{C})$ jsou komplexní Lieovy grupy.
6. $SU(n)$ jsou Lieovy grupy, ale nejsou to komplexní Lieovy grupy.
7. Nechť V je reálný (komplexní) vektorový prostor. $\mathrm{Aut}\, V$ je (komplexní) Lieova grupa, $T_{\mathrm{id}}\, \mathrm{Aut}\, V = \mathrm{End}\, V$.

Poznámka. Zde budou doplněna základní fakta o jednoduše souvislých grupách a faktorizaci podle diskrétních podgrup centra.

Na grupě máme difeomorfismy $L_g : x \to gx$, $R_g : x \to xg$ a $Conj_g : x \to gxg^{-1}$ (levé a pravé násobení, konjugace).[1] Derivace $(L_g)_* : T_eG \to T_gG$ je izomorfizmus (vlastně hladká trivializace tečného bandlu), podobně $(R_g)_*$. Zobrazení $Ad_g := (Conj_g)_* : T_eG \to T_eG$ je dokonce automorfizmus, který se nazývá **adjungovanou akcí**. Tím je též definován homomorfismus Lieových grup $Ad : G \to \mathrm{Aut}\, T_eG$.[2]

Definice 5. Definujme zobrazení $ad : T_eG \to \mathrm{End}\, T_eG$ předpisem $ad := Ad_*$, mluvíme o **adjungované reprezentaci**. Nechť $X, Y \in T_eG$. Definujme dále **Lieovu závorku** $[X, Y] := (ad(X))(Y) \equiv ad_X Y$.

Poznámky

1. Lieova závorka na $\mathrm{End}\, V$ je komutátor endomorfizmů.
2. Nechť $\Phi : G \to H$ je homomorfizmus LG. Platí $Conj_{\Phi(g)} \circ \Phi = \Phi \circ Conj_g$, a tedy i $Ad_{\Phi(g)} \circ (\Phi_*) = (\Phi_*) \circ (Ad_g)$ (derivace), a tedy i $ad_{\Phi_* X} \circ \Phi_* = (\Phi_*) \circ ad_X$ pro $X \in T_eG$. Aplikováno na $Y \in T_eG$ toto dává $[\Phi_* X, \Phi_* Y] = \Phi_*[X, Y]$.
3. Z předchozího bodu speciálně pro $\Phi := Ad$ plyne $[ad_X, ad_Y] = ad_[X, Y]$. Protože na $\mathrm{End}\, T_eV$ je Lieova závorka komutátor endomorfizmů, znamená tento vztah pro libovolné $Z \in T_eG$

$$[X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [[X, Y], Z]$$

Lemma 1. *Nechť $X \in T_eG$, pak $V_X(g) := (L_g)_* X$ je hladké vektorové pole na G, které je* ***levoinvariantní****, čili*

$$(L_g)_*(V_X(h)) = V_X(gh)$$

. Množinu všech levoinvariantních vektorových polí označme $\mathcal{X}^L(G)$. Tato konstrukce dává izomorfizmus vektorových prostorů $V : T_eG \to \mathcal{X}^L(G)$, $X \to V_X$.

Poznámka. Zde bude doplněna definice jednoparametrické podgrupy, exponenciály, důkaz jednoduchých vlastností.

Lemma 2. *Nechť $X, Y \in T_eG$, pak $[V_X, V_Y] \in \mathcal{X}^L(G)$ a*

$$V_{[X,Y]} = [V_X, V_Y]$$

Poznámky:

1. Protože závorka vektorových polí je antisymetrická a V je homomorfizmus VP, je i Lieova závorka antisymetrická. Vztah $[X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [[X, Y], Z]$ je pak možné přepsat do symetričtější podoby $[[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$. V tomto tvaru se mu říká **Jacobiho identita**. Lieova závorka je lineární zobrazení ve druhé složce a díky antisymetrii i v první.
2. Vztah Lieovy grupy a její Lieovy algebry je podrobněji pojednán například v [Souček, prvních 8 stran], [Fulton-Harris, kapitoly 7 a 8], [Simon, kapitola VII], [Miličič, kapitola 2], [Baker, kapitola 7], [Bryant, Lecture 2].

2 Lieova algebra

Definice 6. Nechť $(V, [,])$ je vektorový prostor s operací $[,]$, která je bilineární, antisymetrická a splňuje Jacobiho identitu. Pak nazýváme V **Lieovou algebrou**. Lineární zobrazení $\phi : (V, [,]) \to (W, [,])$ dvou Lieových algeber, které $\forall X, Y \in V$ splňuje $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$, se nazývá **homomorfizmem Lieových algeber**.

Poznámky:

1. $\mathcal{X}^L(G)$ se závorkou vektorových polí je Lieova algebra.
2. T_eG s Lieovou závorkou je Lieova algebra, budeme značit $\mathfrak{g} := (T_eG, [,])$.
3. $\mathrm{End}\, V$ s komutátorem endomorfizmů je Lieova algebra, budeme značit $\mathfrak{gl}(V)$.
4. Homomorfizmus Lieových algeber $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ se nazývá **reprezentace LA**. O vektorovém prostoru, na kterém je zadaná reprezentace $\mathfrak{g}$, mluvíme někdy jako o **$\mathfrak{g}$-modulu**.

[1] Dokažte podrobně, že $L_g, R_g, Conj_g$ jsou difeomorfismy.
[2] Dokažte, že Ad je homomorfismus Lieových grup.

5. Vztah $[ad_X, ad_Y] = ad_{[X,Y]}$ (verze Jacobiho identity) vlastně říká, že ad je reprezentace $\mathfrak{g}$ na vektorovém prostoru $V = \mathfrak{g}$.

Definice 7. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra. Její **podalgebrou** nazýváme vektorový podprostor, který je uzavřen na závorku. **Ideálem** je taková podalgebra $\mathfrak{h}$, pro niž $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Lieovu algebru nemající netriviální ideály, pro niž navíc $\dim \mathfrak{g} > 1$, nazýváme **jednoduchou**. **Centrum** $Z(\mathfrak{g})$ je množina všech prvků $X \in \mathfrak{g}$, pro něž $[X, \mathfrak{g}] = 0$. Pokud $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, nazýváme $\mathfrak{g}$ **abelovskou**. Posloupnost podalgeber definovanou induktivně

$$\mathcal{D}_1\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathcal{D}_k\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathcal{D}_{k-1}\mathfrak{g}]$$

nazýváme **dolní centrální řadou** $\mathfrak{g}$. Pokud $\exists k$, $\mathcal{D}_k\mathfrak{g} = 0$, řekneme, že $\mathfrak{g}$ je nilpotentní. Posloupnost podalgeber

$$\mathcal{D}^1\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathcal{D}^k\mathfrak{g} := [\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}, \mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}]$$

nazýváme **derivovanou řadou** $\mathfrak{g}$. Pokud $\exists k$, $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = 0$, řekneme, že $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

Poznámky:

1. $Z(\mathfrak{g})$ je ideál v $\mathfrak{g}$. Je jádrem adjungované reprezentace.
2. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ je Lieova algebra (vzhledem ke kvocientní závorce) právě když $\mathfrak{h}$ je ideál.
3. Pokud G je souvislá a H její souvislá podgrupa, pak H je normální v G právě když $\mathfrak{h}$ je ideál v $\mathfrak{g}$.
4. $\mathcal{D}_k\mathfrak{g}$ i $\mathcal{D}^k\mathfrak{g}$ jsou ideály v $\mathfrak{g}$.[3]
5. abelovská $\Rightarrow$ nilpotentní
6. nilpotentní $\Rightarrow$ řešitelná
7. Množina $\mathfrak{n}_n$ všech striktně horních trojúhelníkových matic $n \times n$ je nilpotentní algebra, stejně jako každá její podalgebra. Toto je standardní příklad neabelovské nilpotentní algebry, viz Engelova věta.
8. Množina $\mathfrak{b}_n$ všech horních trojúhelníkových matic $n \times n$ je řešitelná algebra, stejně jako každá její podalgebra. Standarní příklad řešitelné algebry, viz Lieova věta.
9. Nilpotence i řešitelnost se dědí na podalgebry a na homomorfní obrazy.
10. $\mathfrak{g}$ je řešitelná, právě když existuje posloupnost podalgeber $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_k = 0$, taková, že každá $\mathfrak{g}_{i+1}$ je ideál v $\mathfrak{g}_i$ a $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ je abelovská.[4] Odtud plyne, že pokud $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ je ideál, pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě když $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ jsou řešitelné.
11. Součet dvou řešitelných ideálů je řešitelný ideál.[5]. Součet všech řešitelných ideálů je tedy maximální řešitelný ideál, zvaný **radikál** $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ nemá řešitelné ideály, je tedy polojednoduchá. Ve skutečnosti existuje v $\mathfrak{g}$ podalgebra $\mathfrak{g}_{ss} \simeq \mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ (**Leviho faktor**), takže $\mathfrak{g}$ lze rozložit na součet $\mathfrak{g}_{ss} \oplus \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ polojednoduché algebry a řešitelného ideálu (**Leviho rozklad**).
12. Lieova algebra je polojednoduchá, právě když nemá nenulové abelovské ideály.[6] Tedy musí mít triviální centrum a tedy adjungovaná reprezentace polojednoduché LA je věrná. Ve skutečnosti má každá LA věrnou reprezentaci (**Adova věta**), což je ekvivalentní tvrzení, že je maticová.[7]

Věta 1 (Engelova)**.** *Nechť $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ je Lieova algebra sestávající pouze z nilpotentních endomorfizmů. Pak existuje báze ve V taková, že matice každého $X \in \mathfrak{g}$ je striktně horní trojúhelníková.*

Poznámky:

1. Nejprve se dokazuje, že existuje společný vlastní vektor celého $\mathfrak{g}$ s vlastním číslem 0, viz [Humphreys, Fulton-Harris]. Nejstručněji asi [Sternberg].

[3] První triviálně, druhá z Jacobiho identity.

[4] Pokud tomu je řešitelná, stačí vzít za posloupnost derivovanou řadu; naopak pokud existuje posloupnost, platí $g_i \supset \mathcal{D}^i\mathfrak{g}$

[5] Protože $(\mathfrak{h} + \mathfrak{k})/\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{k}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k})$

[6] Poslední element v $\mathcal{D}_k\,\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ by byl nenulovým abelovským ideálem.

[7] Důkaz je z Leviho rozkladu konstrukcí věrné reprezentace radikálu, viz [Fulton-Harris]. Pro Lieovy grupy platí pouze slabší verze - každá souvislá LG má reprezentaci s diskrétním jádrem. Existují tedy LG, které nejsou maticové.

2. Nilpotentní algebra nemusí sestávat pouze z nilpotentních endomorfizmů, viz abelovské LA. Platí ale, že $\mathfrak{g}$ je nilpotentní právě když $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je nilpotentní.

Věta 2 (Lieova)**.** *Nechť $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ je komplexní řešitelná Lieova algebra. Pak existuje báze ve V taková, že matice každého $X \in \mathfrak{g}$ je horní trojúhelníková.*

Poznámky:

1. I zde se v důkazu nejprve hledá společný vlastní vektor celé $\mathfrak{g}$. Proto je věta formulována nad komplexními čísly. Opět [Sternberg].

2. Každá ireducibilní reprezentace řešitelné Lieovy algebry je jednodimenzionální[8] a $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ na ní působí triviálně. „Zajímavé“ reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ tedy vznikají z reprezentací Leviho faktoru $\mathfrak{g}_{ss}$. Proto se v dalším budeme soustředit na polojednoduché Lieovy algebry.

Věta 3 (Jordanův rozklad)**.** *Nechť V je komplexní vektorový prostor a $X \in \mathfrak{gl}(V)$. Pak existuje jednoznačný rozklad $X = X_s + X_n$, kde X_s je diagonalizovatelný a X_n nilpotentní. Navíc existují polynomy p, q, že $X_s = p(X)$, $X_n = q(X)$.*

Poznámky

1. Důkaz viz [Sternberg, Humphreys].

2. Mluvíme o polojednoduché a nilpotentní části endomorfizmu. Druhá část znamená, že spolu komutují a komutují také s každým endomorfizmem, který komutuje s X.

3. Platí $(\operatorname{ad}_X)_s = \operatorname{ad}_{X_s}$, a $(\operatorname{ad}_X)_n = \operatorname{ad}_{X_n}$.[9]

4. Obecněji, pokud ρ je reprezentace polojednoduché Lieovy algebry $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, pak $X \in Lg$ znamená, že i $X_s, X_n \in \mathfrak{g}$ a $\rho(X_s) = \rho(X)_s$, $\rho(X_n) = \rho(X)_n$. Pro polojednoduché Lieovy algebry je tedy možné zavést Jordanův rozklad přes libovolnou reprezentaci. Důkaz viz [Fulton-Harris].

Definice 8 (Killingova forma)**.** Bilineární forma na $\mathfrak{g}$ definovaná vztahem $B(X,Y) := \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y)$ se nazývá **Killingova forma**.

Poznámka. Killingova forma je speciálním případem formy B_V na $\mathfrak{gl}(V)$, která endomorfizmům F, G přiřazuje $\operatorname{Tr}(FG)$. Taková forma je zjevně bilineární, symetrická a ad-invariantní, čili

$$B_V(\operatorname{ad}_Z F, G) = B_V([Z,F],G) = B_V(F,[Z,G])) = B_V,(F, \operatorname{ad}_Z(G))$$

Věta 4 (Cartanovo kritérium)**.** *Nechť $\mathfrak{g}$ je komplexní Lieova algebra. Pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná, právě když $B(\mathfrak{g}, \mathcal{D}\mathfrak{g}) = 0$.*

Poznámky

1. Pokud $\mathfrak{g}$ je řešitelná, pak $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je řešitelná a tedy podle Lieovy věty ji lze zapsat horními trojúhelníkovými maticemi. Pak $\operatorname{ad}_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}$ je složená ze stiktně horních trojúhelníkových matic. Pak ale součin $\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y$, kde $X \in Lg$, $Y \in \mathcal{D}\mathfrak{g}$, je striktně horní trojúhelníková, tedy má nulovou stopu.

2. Technická část opačné implikace[10] spočívá v ověření, že pokud $F \in \operatorname{ad}_{\mathcal{D}\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, pak má všechna vlastní čísla nulová. Potom je F nilpotentní, podle Engelovy věty $\operatorname{ad}_(\mathcal{D}\mathfrak{g})$ je nilpotentní, tedy i řešitelná. Protože jádrem ad je abelovský ideál, je i $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ řešitelná a tudíž i $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

3. Z Cartanova kritéria plyne, že Lieova algebra je polojednoduchá, právě když má nedegenerovanou Killingovu formu.[11]

4. Polojednoduchá Lieova algebra je direktním součtem jednoduchých Lieových algeber a tento rozklad je až na pořadí jednoznačný.[12]

[8] Protože $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ je jakožto homomorfní obraz $\mathfrak{g}$ také řešitelná a společný vlastní vektor dává invariantní podprostor ve V.

[9] Stačí najít vlastní čísla ad_{X_s}, ukázat nilpotenci ad_{X_n} a použít jednoznačnost Jordanova rozkladu.

[10] viz [Fulton-Harris, Sternberg], využívá ad-invarianci Jordanova rozkladu

[11] Z ad-invariance B je její vrchol $\mathfrak{s}$ ideálem, podle Cartanova kritéria musí být $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}}$ a tedy i sám $\mathfrak{s}$ řešitelný, a pro $\mathfrak{g}$ polojednoduchou tedy $\mathfrak{s} = 0$. Naopak když B je nedegenerovaná a $\mathfrak{a}$ je abelovský ideál, pak $A = \operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y$, kde $Y \in \mathfrak{g}, X \in \mathfrak{a}$ zobrazuje $\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{a}$ do nuly, tedy $\operatorname{Tr}(A) = 0$ a $\mathfrak{a}$ je součástí vrcholu $\mathfrak{s} = 0$. $\mathfrak{g}$ tedy nemá abelovské ideály a musí být tudíž polojednoduchá.

[12] Pro každý ideál $\mathfrak{h}$ je $\mathfrak{h}^\perp$ také ideál (z ad-invariance B). Z Cartanova kritéria je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ řešitelný ideál, tedy 0, tedy $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$, dále indukcí $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_m$, kde $\mathfrak{g}_i$ jsou jednoduché ideály. Pokud $\mathfrak{k}$ je jednoduchý ideál, pak $[\mathfrak{g}, \mathfrak{k}]$ je netriviální ideál v $\mathfrak{k}$ a tedy samotné $\mathfrak{k}$. Proto v součtu $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}] \oplus \ldots \oplus [\mathfrak{g}_m, \mathfrak{k}]$ musí být právě jeden nenulový člen, tedy $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_i$ a tedy $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_i$, neboť $\mathfrak{g}_i$ je jednoduchý.

5. Odtud $\mathfrak{g}$ polojednoduchá $\Rightarrow [\mathfrak{g}, \mathcal{D}\mathfrak{g}]$. Všechny ideály a obrazy $\mathfrak{g}$ jsou polojednoduché.

Lemma 3 (Schurovo lemma)**.** *Nechť A je komplexní asociativní algebra, V, W jsou dva ireducibilní konečně dimenzionální A-moduly a $\phi : V \to W$ je homomorfizmus A-modulů. Pak ϕ je buď izomorfizmus, nebo nula. Pokud navíc $V = W$, pak existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ taková, že $\phi = \lambda\,\mathrm{id}$.*

Poznámky

1. První část plyne z pozorování, že $\operatorname{Ker}\phi$ a $\operatorname{Im}\phi$ jsou invariantní podprostory. Pro druhou část si stačí uvědomit, že $\phi \in \operatorname{End}(V)$ musí mít aspoň jedno vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a tedy $\operatorname{Ker}(\phi - \lambda\,\mathrm{id}) \neq 0$, tudíž $\phi - \lambda\,\mathrm{id} = 0$.
2. Klasická verze Schurova lemmatu je pro grupu G. Pak se algebrou A rozumí grupová algebra (komplexní vektorový prostor, jehož bází je celé G, ve kterém je násobení definováno skrze grupové násobení). Podprostor je invariantní pro G právě když je invariantní pro její grupovou algebru, podobně s homomorfismy modulů.
3. Ve verzi pro Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ je opět možné definovat asociativní algebru, která $\mathfrak{g}$ obsahuje, tzv. univerzální obalující algebru $U(\mathfrak{g})$. Pak každý $\mathfrak{g}$-modul je automaticky $U(\mathfrak{g})$-modulem a $\mathfrak{g}$-invariantní homomorfizmus je $U(\mathfrak{g})$-invariantní.

Definice 9 (Casimirův element)**.** Nechť $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ je polojednoduchá Lieova algebra, $\{U_i\}$ její báze, $\{U_i'\}$ báze duální vzhledem k B. Endomorfizmus $C_V := \sum U_i U_i' \in \mathfrak{gl}(V)$ nazýváme **Casimirův element** $\mathfrak{g}$.

Poznámky

1. Casimirův element má podle Cartanova kritéria smysl definovat jen pro polojednoduché LA, jinak nemáme pojem duální báze ($B(U_i, U_j') = \delta_{ij}$).
2. Alternativně lze mluvit o Casimirově elementu reprezentace $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, je jím vlastně Casimirův element LA $\rho(\mathfrak{g})$.
3. Casimirův element typicky nepatří do $\mathfrak{g}$, není vytvořen pomocí Lieových závorek. Patří do univerzální obalující algebry $U(\mathfrak{g})$.
4. Platí $[C_V, \mathfrak{g}] = 0$.[13]
5. Podle Schurova lemmatu musí být C_V pro ireducibilní V skalární matice.

Věta 5 (Weylova, o úplné reducibilitě)**.** *Nechť $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ je polojednoduchá Lieova algebra a $W \subset V$ invariantní podprostor. Pak existuje invariantní doplněk $W' \subset V$ k W.*

Reference

[Fulton-Harris] Fulton, W., Harris, J., *Representation Theory: A First Course*, Springer 1991

[Souček] Souček, V., *Representace Lieových grup a algeber*, text k přednášce, 2002

[Humphreys] Humphreys, J. E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer 1973

[Simon] Simon, B., *Representations of Finite and Compact Groups*, AMS 1996

[Baker] Baker, A., *Matrix Groups: An introduction to Lie Group Theory*, Springer 2001

[Hall] Hall, B. C., *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Springer 2003

[Rossmann] Rossmann, W. *Lie Groups: An Introduction Through Linear Groups*, Oxford University Press 2002

[Miličič] Miličič, D. *Lectures on Lie Groups*, `http://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/lie.pdf`

[Bryant] Bryant, R. L. *An Introduction to Lie Groups and Symplectic Geometry*, `http://www.math.duke.edu/~bryant/ParkCityLectures.pdf`

[Sternberg] Sternberg, S., *Lie algebras*, `http://www.math.harvard.edu/~shlomo/docs/lie_algebras.pdf`

[13] Koeficienty v $[X, U_i] = a_{ij} U_j$ a $[X, U_i'] = b_{ij} U_j'$ splňují $a_{ij} = -b_{ji}$, což se využije v přímém výpočtu $[X, \sum U_i U_i']$.