Úvod do teorie Lieových grup

Cvičení k přednášce

Dalibor Šmíd

14. dubna 2017

1. Nalezněte v Campbell-Baker-Hausdorffovu formuli
$$\ln(e^A e^B) = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots$$
členy 3. řádu a ukažte, že je možné je vyjádřit pomocí komutátoru.

2. Nechť $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ má n různých vlastních čísel $a_1, \dots, a_n$. Určete vlastní čísla zobrazení $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$.

3. V $G = SL(2, \mathbb{C})$ jsou definovány podgrupy
$$N := \left\{ g \in G \middle| \; g = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C} \right\}$$
$$N := \left\{ g \in G \middle| \; g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C} \right\}$$
Dokažte, že G je generována jejich sjednocením $N \cup \bar{N}$.

4. Ukažte, že
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & z \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \; a > 0, z \in \mathbb{C} \right\}$$
je uzavřená Lieova grupa a najděte její lineární Lieovu algebru.

5. Zjistěte, jak vypadá obecný prvek grupy $SU(2)$ a ukažte, že je tato grupa izomorfní grupě jednotkových kvaternionů.

6. Ukažte, že
$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) := \{ g \in \mathrm{SL}(2n, \mathbb{C}) | \; g^T J_{n,n} g = J_{n,n} \},$$
kde $J_{n,n}$ je $2n \times 2n$ antisymetrická matice s blokovým zápisem
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
je uzavřená Lieova grupa a najděte podmínky, které musí splňovat prvky její lineární Lieovy algebry.

7. Ukažte, že Lieovy algebry $\mathfrak{so}(3)$ a $\mathfrak{su}(2)$ jsou izomorfní.

8. Nechť $\mathfrak{a}$ je ideál v Lieově algebře $\mathfrak{g}$. Ukažte, že $\mathfrak{g}$ je řešitelná, právě když $\mathfrak{a}$ je řešitelný a $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ je řešitelná.

9. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ jsou dva ideály v ní takové, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Ukažte, že podílové algebry $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ jsou izomorfní. Dokažte odtud s pomocí tvrzení z předchozího úkolu, že konečně dimenzionální Lieova algebra obsahuje maximální řešitelný ideál.

10. Označme V_n prostor všech homogenních komplexních polynomů dvou proměnných z_1 a z_2 celkového stupně n. Definujme $z_i \partial_j \equiv z_i \frac{\partial}{\partial z_j}$, $i, j \in \{1, 2\}$ čtyři endomorfismy V_n. Ukažte, že zobrazení $\rho : \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{End}(V_n)$ dané na bázi jako $\rho(E_{ij}) = z_i \partial_j$, je homomorfismus Lieových algeber. Definujte pomocí něj reprezentaci $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}$ na V_n a ukažte, že je ireducibilní, tj. že neexistuje žádný vlastní podprostor $W \subset V_n$, pro nějž by $\rho(W) \subset W$.

11. Dokažte větu o Jordanově rozkladu: Nechť X je endomorfismus komplexního vektorového prostoru konečné dimenze. Pak existuje jednoznačný rozklad $X = X_s + X_n$, kde X_s je diagonalizovatelný, X_n nilpotentní a $X_s X_n = X_n X_s$. Navíc existuje polynom bez konstatního členu, pro nějž $p(X) = X_s$. (lze najít v Humphreysovi).

12. Popište grupu všech 3×3 reálných matic, které zachovávají afinní rovinu $A_2(\mathbb{R}) := \{(1, x, y)^T | x, y \in \mathbb{R}\}$ a vzdálenost libovolné dvojice bodů v ní. Ověřte, že je to uzavřená Lieova grupa, popište její Lieovu algebru a najděte v ní maximální řešitelný ideál $\mathfrak{b}$ a Lieovu podalgebru $\mathfrak{a}$ takovou, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ jakožto součet vektorových prostorů. Platí $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = 0$?

13. Dokažte, že v úloze 6 ve skutečnosti nebylo nutné požadovat, aby $g \in \mathrm{SL}(2n, \mathbb{C})$, protože každá matice z $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ (i z $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$) má determinant 1. Dokažte, že

$$U(n) \simeq O(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$$

Využijte identifikaci $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R}^n$ zobrazením $x + iy \mapsto (x, y)$. Popište odpovídající isomorfismus Lieových algeber.

14. Dokažte, že nilpotentní Lieova algebra má triviální Killingovu formu.

15. Ukažte, že pokud $\mathfrak{g}$ je polojednoduchá Lieova algebra, pak pro každou derivaci D algebry $\mathfrak{g}$ existuje $X \in \mathfrak{g}$ takové, že $D = \mathrm{ad}\, X$. Návod: zkoumejte lineární formu $Y \mapsto \mathrm{Tr}(D \,\mathrm{ad}\, Y)$ na $\mathfrak{g}$.

16. Dokažte, že pro Killingovu formu Lieovy algebry $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ platí

$$B(X, Y) = 2n \,\mathrm{Tr}(XY) - 2 \,\mathrm{Tr}(X) \,\mathrm{Tr}(Y)$$

Odvoďte analogický vzorec pro Killingovu formu $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Dokažte pomocí něj, že $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ je polojednoduchá Lieova algebra.

17. Označme $\mathfrak{h}_3$ Heisenbergovu Lieovu algebru všech striktně horních trojúhelníkových komplexních matic 3×3. Nechť V je komplexní vektorový prostor všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ tvaru $e^{-s^2} P(s)$, kde P je polynom. Ukažte, že zobrazení, které matici $E_{12} \in \mathfrak{h}_3$ přiřazuje $-i \frac{d}{ds} \in \mathrm{End}(V)$ a matici E_{23} přiřazuje $-is \in \mathrm{End}(V)$, definuje ireducibilní reprezentaci $\mathfrak{h}_3$ na V.

18. Najděte izomorfismus Lieových algeber $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ a $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$.

19. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá reduktivní, pokud její radikál se rovná jejímu centru. Dokažte, že pak je
    (a) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ polojednoduchá.
    (b) $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$ polojednoduchá.
    (c) $\mathfrak{g}$ je direktní součet polojednoduché a abelovské Lieovy algebry.

20. Nechť H je prvek Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ je vlastní podprostor endomorfismu $\mathrm{ad}(H)$ vzhledem k vlastnímu číslu α. Dokažte, že $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

21. Proveďte kořenový rozklad Lieovy algebry $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$. Za Cartanovu podalgebru zvolte algebru všech diagonálních matic. Popište Lieovu algebru $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$, definovanou ovšem tentokrát jako Lieovu algebru zachovávající bilineární formu, jejíž matice je v blokovém zápisu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato volba umožňuje zvolit za Cartanovu podalgebru opět algebru všech diagonálních matic.

22. Nechť V, W jsou konečnědimenzionální reprezentace abelovské Lieovy algebry $\mathfrak{h}$ složené z diagonalizovatelných elementů. Označme Λ_V, Λ_W množiny všech vah těchto reprezentací. Určete, jak vypadá množina všech vah reprezentací V^*, $V \otimes W$, $\mathrm{Hom}(V, W)$, $\Lambda^2 V$, $\mathrm{Sym}^2 V$ (podprostor $V \otimes V$ generovaný elementy tvaru $v \otimes w + w \otimes v$), případně $\Lambda^k V$, $\mathrm{Sym}^k V$, pro $k \in \mathbb{N}$.

23. Pro Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ a standardní volbu jednoduchých kořenů $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ najděte tzv. fundamentální váhy, tj. prvky $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathfrak{h}^*$ splňující $\omega_i(H_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$. Porovnejte celočíselnou mříž Λ_W generovanou fundamentálními vahami a mříž Λ_R generovanou jednoduchými kořeny, ilustrujte pro $n = 2$.

24. Pro Lieovy algebry $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ a standardní volbu jednoduchých kořenů $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ najděte tzv. fundamentální váhy, tj. prvky $\omega_1,\dots,\omega_n \in \mathfrak{h}^*$ splňující $\omega_i(H_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$. Porovnejte celočíselnou mříž Λ_W generovanou fundamentálními vahami a mříž Λ_R generovanou jednoduchými kořeny, ilustrujte pro $n=2$.

25. Uvažujte v $\mathbb{R}^4$ standardní ortonormální bázi $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ a množinu pozitivních kořenů

$$\Delta_+ := \{e_i\}_1^4 \cup \{e_i - e_j\}_{i<j} \cup \{e_i + e_j\}_{i<j} \cup \{\frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}$$

Ukažte, že $\Delta_+ \cup (-\Delta_+)$ je abstraktní kořenový systém, najděte v něm množinu jednoduchých kořenů a přiřaďte Dynkinův diagram.

26. Proveďte klasifikaci ireducibilních redukovaných abstraktních kořenových systémů (např. dle Fulton-Harris, strany 320-330, nebo Knapp 170-180).