Úvod do teorie Lieových grup

Cvičení k přednášce

Dalibor Šmíd

6. dubna 2010

1. Dokažte, že reálná část R Hermitovské formy H na komplexním vektorovém prostoru je symetrická bilineární forma na příslušném reálném vektorovém prostoru, která splňuje $R(v,w) = R(iv,iw)$, imaginární část H je antisymetrická forma určená R a R jednoznačně určuje H. Dokažte odtud, že $U(n) = O(2n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$.
2. Dokažte, že $\mathrm{SU}(n)$ není komplexní Lieova grupa.
3. Ověřte, že $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}\, T_e G$ je hladký grupový homomorfizmus.
4. Nechť $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ má n různých vlastních čísel $a_1, \ldots, a_n$. Určete vlastní čísla ad_X.
5. Dokažte, že $\mathfrak{g}$ je řešitelná, resp. nilpotentní, právě když $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ je řešitelná, resp. nilpotentní.
6. Dokažte, že součet nilpotentních ideálů je nilpotentní ideál, tedy že existuje maximální nilpotetní ideál.
7. Nechť $\mathfrak{g}$ je nilpotentní. Dokažte, že má ideál kodimenze 1.
8. Najděte maximální řešitelnou podalgebru $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.
9. Nechť $X, Y \in \mathfrak{gl}(V)$ komutují. Dokažte, že pak $(X+Y)_s = X_s + Y_s$ a $(X+Y)_n = X_n + Y_n$. Najděte příklad, že tvrzení neplatí, pokud X a Y nekomutují.
10. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a ρ její reprezentace. Ukažte, že pokud $\mathfrak{g}$ není polojednoduchá, pak $(\rho(X))_s = \rho(X_s)$ nemusí platit.
11. Určete Killingovu formu pro $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Ověřte, že v druhém případě je nedegenerovaná a najděte její vrchol v prvním případě.
12. Určete Casimirův element pro $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ a pro její adjungovanou reprezentaci.
13. Dokažte, že pokud je $\mathfrak{g}$ nilpotetní, pak je její Killingova forma triviální.
14. Nechť $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \mathfrak{g}_k$ je rozklad polojednoduchá Lieovy algebry na jednoduché ideály. Dokažte, že diagonalizovatelná část $X \in \mathfrak{g}$ je součtem diagonalizovatelných částí jednotlivých komponent X v tomto rozkladu, stejně tak nilpotentní část nilpotentních.
15. Lieova algebra se nazývá **reduktivní**, pakliže $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$. Dokažte pomocí Weylovy věty, že adjungovaná reprezentace reduktivní Lieovy algebry je úplně reducibilní. Dokažte odtud, že pak $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{D}\mathfrak{g}$.
16. Nechť $\mathfrak{g}$ je jednoduchá Lieova algebra. Dokažte pomocí Schurova lemmatu, že dvě nedegenerované ad-invariantní symetrické bilineární formy na $\mathfrak{g}$ musí být jedna násobkem druhé.